ПРАЛЕТАРЫІ ЎСІХ КРАІН, ЗЛУЧАЙЦЕСЯ!

МЕТАДЫЧНЫ ЛІСТОК

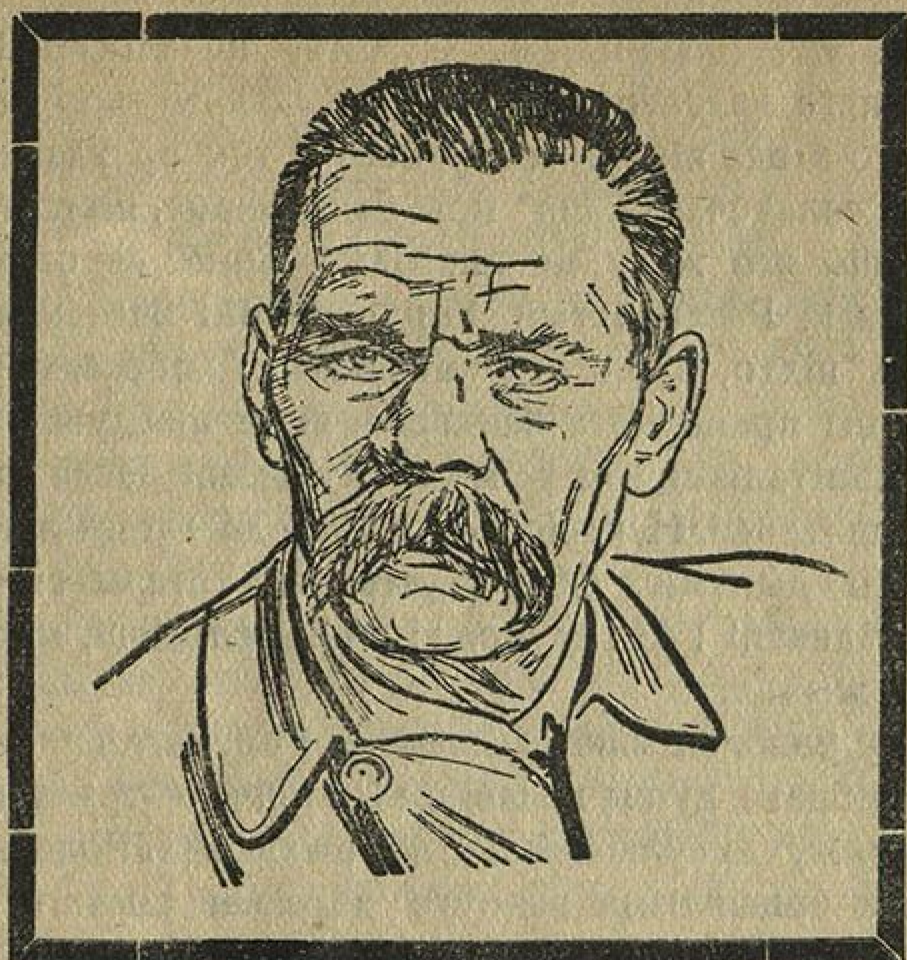
ШТОМЕСЯЧНЫ ОРГАН
ГОМЕЛЬСКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА
ПЕДАГАГІЧНАГА ІНСТЫТУТА

№ 3-4



ИЮНЬ—ИЮЛЬ 1936 ГОДА





Вялікі мастак пролетарыята

Згас свяцільнік розуму, не стала біцца сэрца Алексея Максімавіча Горкага. Абарвалася ніць вялікага і прыгожага жыцця. На грані двух эпох чалавецтва—на закаце капіталізма і на зары комунізма—жыў, тварыў, змагаўся, пакутаваў, палка любіў і горача ненавідзеў гэты вялікі сын вялікага рускага народу.

Горкі быў геніяльным мастаком слова. Вылепленыя ў яго кнігах, у яго песнях вобразы дайшлі і даходзяць да самых глыбінь пачуцця і свядомасці дзесяткаў мільёнаў людзей. Нарысаваныя Горкім людзі, быццам жывыя, стаяць перад вачыма кожнага, хто хоць раз прачытаў яго творы. У яго было зоркае сакалінае вока, якое гісторыя дае мастаку раз у стагоддзі. Мова яго твораў простая і народная, як толькі можа быць велічнай простая мова пісьменніка—абранніка гісторыі. Ён вельмі добра ўмеў бачыць і ў геніяльна простай мастацкай форме абагуліць бачанае, перадаць яго масе народнай так, каб запаліць яе любоўю і нянавісцю да герояў сваіх твораў.

А як ён умеў любіць, як ён умеў ненавідзець! Любоў да працоўнага чалавецтва пранізвае кожны твор Горкага—бадай ніхто з вялікіх мастакоў свету так праўдзіва не апісаў жыцця чалавечага „дна" пры капіталізме, ніхто так праўдзіва ва ўсім яго жаху не паказаў жыццё народных нізоў царскай Расіі. Разам з тым Горкі, вялікі мастак пралетарыята, як ніхто, здолеў у мастацкіх вобразах паказаць золата душы працоўнага чалавека, якое прыдушана і аплёвана пры капіталізме і ва ўсім бляску заззяе пасля звяржэння ладу эксплаатацыі. Нянавісць Горкага да гэтага ладу—велізарнай сілы дынаміт, якім узрываецца стары свет гвалту і гнёту, агіднасці і бруду, крыві і карыслівасці, мяшчанства і шэрасці жыцця.

Чалавек рэвалюцыйнага дзеяння і смелага палёту мыслі, ён усімі фібрамі душы ненавідзеў мяшчан—труслівых, косных, бязрукіх, самаўлюблёных, абмежаваных. Роданачальнікі навуковага соцыялізма задоўга да дзён росквіту таленту Горкага пісалі: філосафы толькі розным чынам растлумачылі свет, а задача заключаецца ў тым, каб змяніць яго. Выхадзец з самых нізоў народных, на сабе спрабаваўшы подласць і агіднасць старога свету, Алексей Максімавіч Горкі ўсё свядомае жыццё аддаў на тое, каб змяніць свет, перарабіць яго. І кожны радок яго песень і казак, аповесцей і раманаў, апавяданняў і артыкулаў дыхае благародным жарам рэвалюцыйнага дзеяння. Недарма цесна звязаў ён сваё жыццё з большэвізмам, недарма быў ён блізкім другам Леніна і Сталіна.

Ленін не раз пісаў, што „Горкі—велізарны мастацкі талент, які прынёс і прынясе многа карысці сусветнаму пралетарскаму руху". Ленін пісаў, што „Горкі—безумоўна буйнейшы прадстаўнік пралетарскага мастацтва", які „моцна звязаў сябе сваімі вялікімі мастацкімі творамі з рабочым рухам Расіі і ўсяго свету". Іскры большэвізма, вялікія ідэі Леніна і Сталіна апладатваралі велізарны мастацкі талент буравесніка соцыялістычнай рэвалюцыі. Задоўга да перамогі пролетарыята, у чорныя дні панавання рэакцыі, Горкі адчуваў надыходзячую буру:

„Он уверен, что не скроют
Тучи солнца, нет, не скроют!
Буря! Скоро грянет буря!

Это смелый буревестник
Гордо реет между молний
Над ревущим гневно морем;
То кричит пророк победы:
Пусть сильнее грянет буря!"

Горкаму пашанцавала дажыць да нашых дзён, калі грымнула на яго вялікай радзіме бура социялістычнай рэволюцыі, і выглянула ўжо над светам сонца социялізма. Гэта перамога не далася дарма. Рускі рабочы клас, якому гісторыя даравала правадыроў Леніна і Сталіна і прызначыла стаць важаком міжнароднага пролетарскага руху,—рускі рабочы клас нямала жыццяў і крыві лепшых сваіх сыноў аддаў у барацьбе за трыумф рэволюцыі. Алексей Максімавіч Горкі—палкі буравеснік пролетарыята, актыўны барацьбіт за перамогу комунізма. Ён быў сокалам большэвіцкай рэволюцыі і зверскай нянавісцю пагарджаў і ненавідзеў вужоў, гадзюк і гадаў меншавізма і іншых відаў буржуазнага ліберализма. У гады, калі меншавіцкія вужы, прапішчаўшы: „Не трэба было брацца за зброю, схаваліся ад небяспек і бур рэволюцыі, Горкі ўславіў смелых сокалаў большэвізма, якія з'явіліся „жывым прыкладам, заклікам гордым да свабоды, да святла!.."

І сам ён з'явіўся такім прыкладам. Ён пісаў і транспартаваў большэвіцкія лістоўкі, супрацоўнічаў у большэвіцкіх газетах, даставаў грошы і арганізоўваў яўкі для работы партыі. Не раз трапляў ён у рукі жандарам—быў у ссылцы, сядзеў у Петрапаўлаўскай крэпасці і ў Мецехскім замку, у турмах Ніжняга і Майкопа.

Перамога социялістычнай рэволюцыі ў СССР дала новы штуршок росквіту таленту Алексея Максімавіча. У гады социялістычных пераўтварэнняў Горкі працягвае дарыць чалавецтву новыя геніяльныя мастацкія творы і разам з тым зноў бярэцца за пяро публіцыста—трыбуна комунізма. Сам вялікі майстар культуры, ён узвышае свой голас да майстроў культуры капіталістычнага свету і паказвае інтэлігенцыі, што шлях усяго сумленнага ў чалавецтве ляжыць да пролетарыята, да СССР, да социялізма.

Акружаны любоўю ўсяго совецкага народу, усіх працоўных, чыім беззаветным быў ён другам, Алексей Максімавіч да апошняга свайго ўздыхання заставаўся гарачым і верным

байцом за справу Маркса, Энгельса, Леніна і Сталіна, байцом за комунізм, ініцыятарам і тварцом многіх бяссмертных літаратурных помнікаў нашай эпохі.

Вялік талент Горкага, вялікія яго заслугі перад новым чалавецтвам, і ніколі не праглыне яго светлага імя павольная лета—рака часоў. У памяці працоўнага чалавецтва доўгія стагоддзі будзе непагасным агнём гарэць імя вялікага рускага пісьменніка, геніяльнага мастака слова, беззаветнага друга працоўных, барацьбіта за перамогу комунізма—таварыша Алексея Максімавіча Горкага.

Перад смяротным яго ложам у велізарным смутку партыя большэвікоў, рабочы клас, усе народы Совецкага Саюза схіляюць свае сцягі.

(Перадавы артыкул „Праўды“).

ДАРАГІЯ ТАВАРЫШЫ!

Выпуск нашага Інстытута супадае з адным з гістарычных момантаў нашага социялістычнага будаўніцтва— з момантам абнародвання і абгаварэння ўсім Совецкім Саюзам вялікага сталінскага дакумента—праекта Канстытуцыі (асноўнага закона) СССР. Сталінская Канстытуцыя, грунтуючыся на нязыблемых устоях социялістычнай эканомікі, забяспечвае права на працу і адукацыю для кожнага грамадзяніна Совецкага Саюза.

Таварышы-выпускнікі, у сваёй практычнай рабоце вы абавязаны ажыццяўляць гэта права на адукацыю. Перад вамі стаіць задача ўзброіць ведамі, даць асновы навук маладому пакаленню нашай социялістычнай радзімы. Няма задачы больш пачэснай, няма работы дольш слаўнай, больш доблеснай, чым праца народнага настаўніка ў Совецкім Саюзе. Настаўнік у нас акружан выключнай увагай з боку комуністычнай партыі, совецкага ўрада і асабістымі клопатамі геніяльнага правадыра сусветнага пролетарыята т. СТАЛІНА.

Настаўнік у Совецкім Саюзе выконвае выключную па сваёй вартасці задачу—ён падрыхтоўвае пакаленне, здольнае канчаткова ўстанавіць комунізм. Ад настаўніка Совецкага Саюза таму патрабуецца: быць адданым справе рабочага класа, справе Маркса-Леніна-Сталіна, быць узброеным марксісцка-ленінскай тэорыяй, ведаць дасканала выкладаемы ім прадмет і быць узорным у сваёй справе.

Задача совецкага настаўніка заключаецца і ў тым, каб ён клапаціўся аб удасканаленні совецкай школы, каб ён вёў сталую барацьбу за больш высокую якасць работы школы, за карэннае палепшанне педпрацэса, за высокую якасць выхавання і глыбокія веды асноў навук нашага маладога падрастаючага пакалення. Зараз больш чым калі-

небудзь можна сказаць, што настаўнік—цэнтральная фігура ў школе. Ад якасці яго работы, ад яго кваліфікацыі залежыць узровень работы школы.

Вітаючы вас з заканчэннем вышэйшай педагагічнай школы, мы глыбока ўпэўнены, што вы з гонарам апраўдаеце задачы, ускладзеныя на вас комуністычнай партыяй і совецкім урадам, што вы з уласцівым для совецкай моладзі энтузіязмам прымецеся за вялікую справу навучання і выхавання маладога пакалення і пакажаце ўзоры добрай работы, дастойнай сталінскай эпохі.

Разам з гэтым рэдакцыя звяртаецца да вас з просьбай падзяліцца вашым будучым вопытам, вашымі дасягненнямі на старонках нашага „Метадычнага лістка". Трымайце з намі цесную сувязь, пішыце нам аб усіх хвалюючых вас пытаннях, паведамляйце нас аб вашых цяжкасцях, будзьце актыўнымі ўдзельнікамі нашага лістка і яго сталымі чытачамі. Рэдакцыя абяцае вам дапамогу ў вашай рабоце па будаўніцтву совецкай палітэхнічнай школы, школы Маркса-Энгельса-Леніна-Сталіна.

Рэдакцыя „Метадычнага лістка".

Праф. Страхаў І. В.

Аб профарыентацыйнай працы ў школе

Выбар прафесіі—гэта выключна важны і адказны крок у індывідуальнай гісторыі кожнага чалавека. Выбар прафесіі з'яўляецца адказным момантам і ў асабовых адносінах і з пункту погляду дзяржавы і грамадства. Іменна, надзвычайна важна, каб вучні, якія заканчваюць сярэднія і няпоўныя сярэднія школы, выбіралі для сябе такога роду дзейнасць, у якой яны маглі-б найбольш эфектыўна праявіць свае асабовыя здольнасці і дараванні, у якой яны прынеслі-б максімальную карысць дзяржаве і грамадству, а таксама атрымалі-б ад гэтай дзейнасці задавальненне сваіх асабовых патрабаванняў і запытанняў. Наадварот, памылкі ў выбары прафесіі шкодны як для грамадства, для вытворчасці, так і персанальна для асобы, якая дапусціла такую памылку.

Не ўсякі чалавек з аднолькавым поспехам можа займацца любой прафесіяй. Наяўнасць у асобнага працаўніка пэўных здольнасцей, інтарэсаў, адукацыйнай падрыхтоўкі, асаблівасцей здароўя і фізічнага стану арганізма з'яўляецца прадпасылкай для аўладання пэўнай прафесійнай працай і ў той-жа час, можа быць, з'яўляецца супроцьпаказаннем для заняткаў у другой прафесіі або, прынамсі, абмяжоўвае патэнцыяльныя магчымасці і перспектывы работы гэтага працаўніка ў другой галіне. І вось у мэтах рацыянальнай пастаноўкі выбару прафесіі вучнямі, якія заканчваюць сёмыя і дзесятыя класы, неабходна, каб педагагічны калектыў школы аказваў выпускнікам усямерную дапамогу ў гэтым адказным моманце выбару прафесіі. Самі выпускнікі школ з гэтай справай спраўляюцца далёка не заўсёды так, як гэта было-б патрэбна. Яны не заўсёды правільна ацэньваюць уласныя асабовыя якасці і інтарэсы, не заўсёды маюць правільнае ўяўленне аб выбіраемай прафесіі, не заўсёды правільна судзяць аб тым, чаго яна патрабуе ад працаўніка і нярэдка зусім не ўяўляюць працэсу падрыхтоўкі да гэтай прафесіі, маючы на ўвазе толькі вынік гэтай падрыхтоўкі. Улічваючы неабходнасць правільнага накіравання далейшай дзейнасці выпускнікоў, школа і павінна здзейсніць у выпускных класах цэлы рад мерапрыемстваў, вядомых пад агульнай назвай прафесійнай арыентацыі. У гэтым артыкуле мы і маем на ўвазе даць кароткую характарыстыку асноўных

мерапрыемстваў прафарыентацыйнай справы ў выпускных класах няпоўнай сярэдняй і сярэдняй школы.

Прафарыентацыя ўключае ў сябе: 1) прафесійную асвету, 2) вывучэнне індывідуальных якасцей вучняў, галоўным чынам іх здольнасцей і інтарэсаў, 3) прафесійную кансультацыю. Прафасвета мае сваёй мэтай азнаямленне вучняў з рознымі відамі прафесійнай дзейнасці, шлях да якіх адкрывае ім сканчэнне школы. Яна павінна дапамагчы выпускніку атрымаць правільнае разуменне аб вузах, тэхнікумах і вытворчасці, аб іх значэнні для народнай гаспадаркі, аб тым, якія патрабаванні яны прад'яўляюць працаўніку, як ідзе там працэс працы або навучання, што яны даюць у выніку і іншыя пытанні.

Вывучэнне індывідуальных якасцей выпускнікоў з прафесійнай мэтай павінна выявіць асабовыя нахілы і задаткі кожнага асобнага вучня, яго здольнасці і інтарэсы, яго адукацыйную падрыхтоўку і школьную паспяховасць, яго здароўе і фізічны стан.

Прафасвета і вывучэнне вучняў з паказанай мэтай падводзяць да трэцяга, выключнага моманту прафарыентацыі— да рэкамендацыі будучай прафесіі, што ўласна і складае профкансультацыю. Характарызуем цяпер кожнае з гэтых мерапрыемстваў паасобку, улічваючы парадак і паслядоўнасць здзяйснення прыватных момантаў усёй гэтай працы.

Мерапрыемствы па прафасвеце могуць быць здзейснены ў наступнай форме. Гэту працу мэтазгодна пачаць з правядзення ўступнай гутаркі з вучнямі выпускнога класа. Непасрэдная задача гэтай гутаркі састаіць у тым, каб падвесці вучняў да ўсведамлення важнасці наступных мерапрыемстваў па прафасвеце. У гэтым сэнсе даная гутарка з'яўляецца ўступам у гэтыя мерапрыемствы і павінна падрыхтаваць вучняў да актыўнага і свядомага ўдзелу ў далейшай працы школы ў гэтых адносінах. Разам з тым, у гэтай гутарцы належыць паставіць і некаторыя агульныя пытанні, якія адносяцца да выбару прафесіі. Такімі пытаннямі могуць быць наступныя: 1) растлумачэнне асноўнага палажэння аб значэнні рацыянальнага выбару прафесіі з пункту погляду народнай гаспадаркі нашай краіны, яе палітычных і культурна-гаспадарчых задач, а таксама ў адносінах індывідуальных асаблівасцей кожнага асобнага чалавека, у даным выпадку вучня, які заканчвае школу; 2) указанне на важнасць свядомых адносін да выбару прафесіі кожным выпускніком; 3) растлумачэнне шкоднасці нерацыянальнага, памылковага выбару прафесіі, 4) разбор пытання аб фактарах, якія ўплываюць на выбар прафесіі (веданне прафесій, інтарэс, здольнасці і г. д.).

Пасля правядзення ўступнай гутаркі неабходна паклапаціцца аб здзяйсненні канкрэтнага знаёмства вучняў з рознымі тыпамі навучальных устаноў і вытворчасцей. Гэта азнаям-

ленне можа быць здзейснена, галоўным чынам, праз наступныя мерапрыемствы. Вельмі карысна арганізаваць лекцыі-гутаркі, якія знаёмяць вучняў з рознымі відамі прафесій, а таксама з працэсам падрыхтоўкі да іх. Для гэтай мэты лепш за ўсё запрашаць у школу асоб, добра знаёмых з пастаноўкай працы ў вузах або на прадпрыемствах (прафесароў, інжынераў, членаў дырэкцыі вузаў і г. д.), але, канечна, і самі настаўнікі і нават таварышы, раней скончыўшыя школы, таксама могуць зрабіць тут многае. У такіх лекцыях неабходна асвятляць такія пытанні, як, напрыклад, профіль вуза, аб якім ідзе гутарка, каго ён рыхтуе, якія там ёсць спецыяльнасці, умовы і характар падрыхтоўкі, метады працы, правілы паступлення і г. д. Такія лекцыі могуць мець і шырокую тэматыку, напрыклад, аб тыпе пэўных вузаў або тэхнікумаў і болей вузкую, у адносінах пэўных навучальных установ з болей паглыбленай іх характарыстыкай. Тое-ж адносіцца і да лекцый, якія характарызуюць вытворчасць і ўстановы, у якіх падростак мог бы працаваць па сканчэнні вуза або мог бы ў іх паступіць непасрэдна пасля сканчэння сярэдняй школы.

Вельмі карысна таксама арганізаваць адпаведныя экскурсіі ў вузы, установы і на вытворчасць. Экскурсіі карысны іменна сваёй нагляднасцю і непасрэднасцю назірання. Вялікае значэнне мае папярэдняя падрыхтоўка экскурсій і змястоўнае іх правядзенне ў сувязі з іх асноўнай мэтай у плане профасветы.

Урэшце, вялікае значэнне мае пастаўленая ў гэтым-жа плане некаторая праца школьнай бібліятэкі. Іменна, важна, каб у бібліятэцы была інфармацыйная літаратура тыпу даведнікаў і ўказальнікаў па пэўных галінах вузаўскага навучання і вытворчай дзейнасці. Важна таксама, каб у бібліятэцы была літаратура аб тым, якія і дзе ёсць вузы, якія ў іх умовы прыёму і г. д. І, зразумела, неабходна азнаёміць вучняў-выпускнікоў з гэтай літаратурай, даць ім неабходныя тлумачэнні.

Такім чынам, профасвета ў выпускных класах няпоўнай сярэдняй і сярэдняй школы павінна пайсці, галоўным чынам, у кірунку арганізацый лекцый-гутарак, экскурсій і кніжна-даведачнага азнаямлення вучняў з рознымі формамі прафесійнага навучання і працы. Уся гэта праца павінна ісці пад кіраўніцтвам навучальнай часткі школы і пры бліжэйшым ўдзеле класнага кіраўніка выпускнога класа. Многа карысці для школы ў гэтых адносінах можа прынесці кантакт у гэтай працы з мясцовымі вузамі і тэхнікумамі і псіха-тэхнічнымі ўстановамі. Праца гэта павінна ставіцца планамерна, і метады яе, канечна, будуць мяняцца на розных стадыях яе правядзення, па меры яе паглыблення. Зразумела, важна гэту працу будаваць не толькі ў агульнакласным маштабе,

але і ў адносінах да асобных вучняў, адпаведна з гэтым змяняючы метады гэтай працы.

Паралельна з правядзеннем мерапрыемстваў па профасвеце школа павінна весці вывучэнне вучняў выпускных класаў у профарыентацыйным плане. Гэта вывучэнне павінна быць накіравана на тое, каб вызначыць інтарэсы вучня, яго здольнасці, яго агульнае развіццё, яго навучальную падрыхтоўку, па якіх прадметах і як іменна ён паспявае, які стан яго здароўя і фізічныя даныя яго арганізма.

Такога роду назіранні над вучнямі класныя кіраўнікі павінны весці і незалежна ад профарыентацыйных задач, паколькі наогул адным з абавязкаў класнага кіраўніка і кожнага настаўніка з'яўляецца планамернае вывучэнне вучняў з мэтай выкарыстання гэтых даных для палепшання педагагічнага працэса. Аб тым, як трэба здзяйсняць гэта вывучэнне, мы пісалі ў папярэднім нумары „Метадычнага лістка“, і тое, што сказана па гэтых пытаннях там, мае тое-ж значэнне і ў адносінах да данай задачы, таму мы і рэкамендуем чытачу выкарыстаць гэту нашу метадычную заметку („Метадычны лісток № 2“. „Як вывучаць вучня“). Да напісанага там дададзім тут некалькі заўваг аб вывучэнні інтарэсаў, з прычыны асаблівай важнасці гэтай тэмы ў профарыентацыйных мэтах.

Вывучаючы інтарэсы кожнага асобнага вучня, важна не проста канстатаваць іх наяўнасць або адсутнасць, але разабрацца ў самай іх псіхалагічнай структуры. У гэтай сувязі неабходна звярнуць увагу:

1) на з м е с т інтарэсаў—наяўнасць інтарэсаў тэхнічных, грамадска-палітычных, навуковых, мастацкіх, слабасць развіцця культурных інтарэсаў; дробныя абывацельскія інтарэсы; інтарэсы падменены псіха-фізіялогіяй „влечений“ і г. д.;

2) н а г л ы б і н ю інтарэсаў або іх павярхоўны характар;

3) н а ў с т о й л і в а с ц ь інтарэсаў або хістанні і частыя змены іх;

4) н а ш ы р ы н ю інтарэсаў або іх вузасць: цікавіцца многімі аб'ектамі, мае пэўны круг інтарэсаў, інтарэсы абмежаваны вузка-спецыяльнай галіной;

5) н а ў з г о д н е н а с ц ь інтарэсаў або супярэчлівасць між асобнымі інтарэсамі, так што на вучня гэта дзейнічае прыгнятаюча: ён не ведае, якім інтарэсам аддаць перавагу;

6) н а м а т ы в ы інтарэсаў: пытаецца з мэтай зразумець даныя аб'екты, праяўляе разумовую дапытлівасць, або цікавіцца з прычыны чыста эмацыянальнай цікавасці;

7) н а с у а д п а в е д н а с ц ь м і ж і н т а р э с а м і і з д о л ь н а с ц я м і: ступень узаемнай адпаведнасці інтарэсаў і здольнасцей; цікавіцца такімі прадметамі, да якіх на мае здольнасцей;

8) на ступень усведамлення інтарэсаў: думае па поваду сваіх інтарэсаў або недастаткова усведамляе наяўнасць у сябе пэўных інтарэсаў, якія, аднак, маюцца, што відна з назіранняў над вучнем—чым ён больш любіць займацца, як займаецца рознымі прадметамі і т. д.;

9) на адносіны да сваіх інтарэсаў: даражыць сваімі інтарэсамі, змагаецца за ўмовы, спрыяючыя іх развіццю, або інтарэсы павярхоўна звязаны з асобай—цікавіцца чым-небудзь пад уплывам другіх асоб, пасіўна пераймае, мае на ўвазе асабовую карысць і кідае гэтыя інтарэсы са змяненнем умоў;

10) на злучэнне асабовага і грамадскага ў інтарэсах: цікавіцца чым-небудзь толькі для сябе, на першым плане ставіць матыў карыснасці даных заняткаў або, выбіраючы пэўны аб'ект працы, звязвае сваю карысць і інтарэс да гэтай працы з мэтай служэння грамадству, разглядаючы сваю працу ў гэтай галіне як грамадскае прызванне;

11) на пераважаемую крыніцу ў дасягненні сваіх інтарэсаў: вучань любіць кнігу, любіць чытанне, або больш схілен да практычнай дзейнасці, любіць рэчы рабіць самастойна, назіраць, як робяць іншыя, назіраць з'явы прыроды і г. д.;

12) важна ўлічыць таксама фактары, якія ўплываюць на развіццё інтарэсаў вучняў, напрыклад ролю сям'і ў гэтых адносінах, уплыў таварышоў і г. д.

Самая методыка вывучэння інтарэсаў ва ўмовах школы можа прыняць такія формы: настаўнік паступіць зусім правільна, калі ён установіць сістэматычны нагляд за навучальнай працай вучня; праца вучня над рознымі навучальнымі прадметамі, яго школьная паспяховасць дае матэрыял для разважання аб яго здольнасцях і інтарэсах; важна таксама, каб класны кіраўнік і шляхам апытанняў і гутарак у парадку асабовых непасрэдных зносін высвятляў наяўныя інтарэсы вучняў—што падабаецца вучню, чаму, што ён ведае аб цікавячым яго прадмеце і г. д.; у некаторых выпадках карысна таксама практыкаваць укладанне на такія тэмы, як „кім я хачу быць", „мае любімыя заняткі", „чым я хачу займацца па сканчэнні школы".

Усе рэзультаты назіранняў неабходна абагуліць і прааналізаваць з пункту погляду прыгоднасці данага вучня да выбіраемай ім прафесіі. Пры гэтым неабходна супаставіць наяўныя здольнасці, падрыхтоўку і інтарэсы данага вучня з патрабаваннямі, якія прад'яўляе да работніка выбіраемая вучнем прафесія. На падставе гэтага супастаўлення і неабходна, разам з вучнем-выпускніком, устанавіць, якога роду прафесію мэтазгодней яму выбраць. Гэта абгрунтаваная рэкамендацыя і складае заключны этап у профарыентацыйнай працы—профкансультацыю.

Такім чынам, сэнс і значэнне профарыентацыйнай працы ў выпускных класах няпоўнай сярэдняй і сярэдняй школы зводзяцца да таго, каб выпрацаваць у вучняў свядомыя адносіны да выбару прафесіі, аказаць уплыў на фарміраванне ў іх прафесійнай накіраванасці, вывучыць асабовыя якасці вучняў, прааналізаваць гэтыя якасці з пункту погляду рацыянальнага выбару імі прафесіі, правесці працу па азнаямленню вучняў з рознымі відамі прафесійнага навучання і працы, даць ім абгрунтаваныя рэкамендацыі да выбірання пэўнай прафесіі або арыентыровачнага круга прафесій і дапамагчы ім у самой рэалізацыі гэтай мэты (даведачная праца).

Пажадана, каб школа ў правядзенні профарыентацыйных мерапрыемстваў устанавіла і ў гэтых адносінах шчыльную сувязь з сям'ёй вучня, бо сям'я аказвае вялікі ўплыў на выбар прафесіі. Важна, каб і ў гэтым пытанні школа і сям'я трымаліся адзінай педагагічнай лініі. Вядзенне сярод бацькоўпрапаганды ідэй рацыянальнага выбару прафесіі іх дзецьмі-выпускнікамі школ можа ва многім аблягчыць пастаноўку профарыентацыйнай працы ў самай школе.

Профарыентацыйная праца—гэта спецыяльны цыкл мерапрыемстваў па вывучэнню вучняў і выхаванню ў іх прафесійнай накіраванасці. Гэта праца, праводзімая ў выпускных класах, павінна апірацца на сталыя мерапрыемствы па выхаванню культурных інтарэсаў вучняў, фармаванню іх развіцця, па авалодванню асновамі навук, узбагачэнню іх разумовага кругагляду, а таксама і на сталыя мерапрыемствы па вывучэнню вучняў з мэтай палепшання педагагічнага працэса ў адносінах да дзяцей розных узростаў і індывідуальных асаблівасцей. Рашаючае значэнне ў навучанні і выхаванні вучняў у школе маюць іменна гэтыя сталыя мерапрыемствы, праводзімыя школай ва ўсіх класах. І зразумела, што спецыяльныя мерапрыемствы профарыентацыйнага характару будуць тым болей эфектыўны, чым болей грунтоўна будзе пастаўлена ўся навучальная і выхаваўчая праца школы.

Як выкладчыку-прыродаведу падрыхтавацца да вучэбнага года.

На працягу 2 з паловай год студэнты-выпускнікі ў Ін-це распрацоўвалі методыку прыродазнаўства. Разбіралі шэраг метадаў, якімі можна падыйсці да вывучэння той ці іншай з'явы. Дэманстрацыя аб'екта ці доследа надзвычайна дапамагае засваенню вучнямі матэрыяла ўрока. У гэтым мы пераканаліся ў час практычных лекцый, але далёка не заўсёды ў школе ёсць што дэманстраваць, вось чаму і прапаную Вашай ўвазе некалькі зусім канкрэтных заўваг.

Частка ніжэйпрывадзімых фактаў ужо апісана ў метадычнай літаратуры і ўсё праароблена ў габінеце батанікі ў парадку падрыхтоўкі дэманстрацыйнага матэрыяла па лекцыях.

Значная частка вучэбнага года прыпадае на зімовы перыяд, калі амаль усе жыццёвыя працэсы ў прыродзе заміраюць, і знайсці неабходны для дэманстрацый выкладчыку прыродазнаўства ці для лабараторнай распрацоўкі матэрыял не лёгка альбо і зусім немагчыма.

У выніку атрымліваецца надзвычайна непрыемнае з'явішча: настаўнік апавядае аб жыцці або аб моманце развіцця таго ці іншага арганізма, не паказваючы ні самога арганізма, ні дадзенай фазы яго развіцця, хаця-б гэты арганізм і быў самым звычайным для дадзенай мясцовасці.

Каб пазбегнуць гэтага, неабходна з лета і восені загатовіць некаторы мінімум матэрыяла, які будзе патрэбен зімою.

Мы не ставім сваёю мэтаю дэталёва распрацаваць ілюстрацыйны матэрыял па кожнай тэме. Мы толькі хочам напомніць выкладчыкам, што можна летам і восенню загатовіць на зіму як ілюстрацыйны матэрыял, так і матэрыял для лабараторных работ. Улічваючы яшчэ некаторую абмежаванасць плошчы ў школах, нярэдка і матэрыяльныя цяжкасці, тут будзем гаварыць толькі аб тым, што зараз магчыма ва ўсякай школе.

У V-х класах распрацоўваецца жыццё расліны; шэраг доследаў, якія тут неабходна паказаць, могуць быць праведзены на звычайных комнатных раслінах, якія ёсць на вокнах класа.

З восені трэба загатовіць для гэтага класа наступнае: 1) эладэю, якая добра жыве ўсю зіму ў шкляных банках з вадою; яна добры аб'ект для дэманстрацый клетачнай будовы расліны і руху плазмы; 2) дзве-тры лапаты агароднае глебы палажыць у скрынку і паставіць альбо ў кладоўцы, альбо ў габінеце прыродазнаўства, закрыўшы ад пылу паперай, для доследаў на глебу; для акварыума неабходна некаторая колькасць мытага рачнога пяску; 3) сабраць калекцыю насення з рознымі дапасаваннямі к распаўсюджванню.

Па VI-х класах: 1) Неабходна мець гербарый культурных і дзікарастучых раслін, аб гэтым трэба клапаціцца ўсё лета, але калі яно ўпушчана, то і восенню іх можна знайсці хоць у выглядзе снапкоў.

2) Нітчатыя вадаросты, якія добра жывуць у банках памерамі ад 2 да 4 літраў, не патрабуючы асаблівага догляду; трэба толькі сачыць, каб у банкі дзеці не кідалі астаткаў ежы і інш., а набраць іх можна ўсюды і асабліва лёгка ў замкнутых вадаёмах, яны маюць выгляд вялікіх камоў зяленай ціны. Для таго, каб вадаросты жылі, не трэба браць іх у адну банку многа. Камок, які можа умясціцца ўсталовай лыжцы, трэба класці ў банку літраў $2^1/_2$—3. Найлепш выжываюць з нітчатых зігнема і мужоція; спірагіра досыць хутка гіне, але да паловы зімы выжывае.

З аднаклеткавых вадаростаў проста знайсці хламідаманаду і кластэрыум. Лужы зяленай вады і прадстаўляюць масу хламідаманад, іх можна ўзяць нават позняй восенню, а кластэрыум можна знайсці ў лужах тарфянікаў; у лабараторных умовах хламідаманада жыве каля месяца, а кластэрыум, узяты з вадою тарфяніка, значна больш.

3) Для дэманстрацый спор грыба і месца іх развіцця трэба зрабіць наступнае: добра развіты баравік, або сыраежку паставіць карэньчыкам на ліст паперы, змазаны гуміарабікам і змясціць пад шкляную банку. Высыпаючыяся споры падаюць на свежы гуміарабік, засыхаюць разам з ім і гэтым самым фіксуюць месцы іх адвеснага падзення. Плесневы грыб мукор заўсёды можна развесці, калі палажыць кусок змочанага хлеба ў шклянку ці прастаквашніцу і прыкрыць яго шкляннoю пласцінкаю для ўтварэння паветра, насычанага вадзяною параю.

4) Для распрацоўкі „тэмы мхі і папараці“ з восені неабходна набраць раслін моху „кукушкін лён“ з спорагонамі і каробачкамі з спорамі, а таксама лістоў папараці з спарангіямі і спорамі. Пры распрацоўцы гэтых тэм трэба не толькі расказваць, але і паказваць.

Набіраюцца расліны, засушваюць як гербарый і ў гэткім стане захоўваюць. За 10—15 дзён да ўрока па моху споры з каробачк моху высяваюцца на тарфяную пласцінку, па-

пярэдне праварануую ў вадзе для выдзялення арганічных кіслот. Пласцінка кладзецца альбо ў глыбокую гліняную міску, альбо ў шкляную прастаквашніцу з вадою на дне і прыкрываецца зверху шкляною пласцінкаю для стварэння кругом пласцінкі атмасферы, насычанай вадяною параю. Пры гэтакіх умовах праз 10—15 дзён пад мікраскопам яскарава відаць пратанема моху, якую трэба і паказаць вучням, а не толькі пра яе расказваць.

Таксама і сам мох—калі пра яго гаворыць выкладчык, то яго неабходна хоць паказаць усім вучням, а яшчэ лепш раздаць па партах.

Урок па папараці трэба пачынаць з дэманстрацыі гербарнага экземпляра гэтай расліны, затым разглядання ў лупу сорусаў і спарангіяў і спор.

Далей ідзе гутарка аб заростку папараці, але без паказу яго ўяўленні ў дзяцей аб заростку вельмі непэўныя, а мець пад рукамі ў лабараторыі заросткі амаль круглы год вельмі проста. Для гэтага паступаюць наступным чынам: таксама пракіпяціць у вадзе тарфяную пласцінку, палажыць у прастаквашніцу або ў звычайную гліняную міску з вадою на дне, высеяць на пласцінку споры і пакрыць прастаквашніцу ці міску шкляною пласцінкаю з той-жа мэтаю, як і для моху.

Споры папараці прарастаюць праз $1^1/_2$—2 тыдні, але нармальны заростак папараці вырастае праз $1^1/_2$—2 м-цы з часу высеву спор. Калі трымаць тарфяную пласцінку вільготнай, то заросткі можна мець вельмі доўгі час, больш года, бо адны з іх будуць адміраць ці даваць папараць, а з другіх спор вырастаць новыя. Паказванне ўсіх этапаў развіцця папараці—найлепшы сродак ускрыцця перад дзецьмі беспадстаўнасці казак аб цвіценні папараці пад Іванаў дзень.

Дэманстрацыя нітчатых вадаростаў і нітчатае пратанемы моху дае фактычны матэрыял для тлумачэння гістарычнага развіцця раслінных форм і выхоўвае ў дзяцей дыялектыка-матэрыялістычны светапогляд на навакольную прыроду.

5. Амёбы можна знайсці ў 6-10-дзённым сянным настоі, у пленцы, якая ўтвараецца па паверхні настою. Інфузорыі—у гэтым-жа настоі, але пазней. Настой гэты можна зрабіць і зімою.

6. Гідру трэба ўзяць з вадаёма. У вялікай колькасці яны знаходзяцца на эладэі, і каб іх набраць—трэба набраць эладэй, прынесці ў лабараторыю, даць адстаяцца вадзе, і іх не трудна заўважыць на сценках банкі і лістах і сцяблах эладэй.

Пры дапамозе піпеткі адсаджваюць гідры у асобныя баначкі і кормяць дафніямі і цыклопамі, якіх ад часу да часу уносяць к гідрам піпеткаю, а дафніі і цыклопы будуць жыць усю зіму, калі набраць іх з пруда разам з ілам з дна.

7. Пры распрацоўцы чарвей як прыклад бярэцца дажджавы чарвяк. Агульны выгляд дажджавога чарвяка амаль усім дзецям будзе вядом, але дэталі, пра якія гаворыцца ў кніжцы, не ўсе бачылі, хаця-б тыя-ж валаскі і паясок; таму паказ яго і нават ускрыццё надзвычайна дапамагаюць засваенню. Загатовіць дожджавых чарвей на зіму можна наступным чынам. Збіваюць з дошчак шчыльную скрыню памерам 1 метр у даўжыню, 50-60 см. у шырыню і 50-60 см. у вышыню (велічыня скрыні не мае вялікага значэння, толькі, зразумела, чым больш скрыня, тым больш трэба глебы). Ставяць яе альбо у габінеце, альбо ў жывым кутку, альбо, яшчэ лепш, у падвале. Насыпаюць амаль поўную скрыню агароднай зямлі, кладуць кавалкі печанае або варанае бульбы і перагніўшых лістоў, накапваюць і пускаюць у скрыню дажджавых чарвей. Догляд састаіць у падтрыманні зямлі ў скрыні ў вільготным стане, для чаго праз 2-5 дзён, у залежнасці ад тэмпературы памяшкання, паліваюць вадою з лейкі. У гэткім садку чэрві добра сябе адчуваюць усю зіму.

8. Членістаногія распрацоўваюцца з восені і тут асаблівай падрыхтоўкі не трэба, матэрыялу ў прыродзе восенню ў дастатковай колькасці. Усю зіму добра жывуць жукі-плавунцы; карміць іх можна мясам, якое прывязваецца на ніткі і апускаецца ў банку, дзе жывуць плавунцы, на некаторы час: на 15—20 хвіл.

9. Пры распрацоўцы хрыбетных у VII класе і анатоміі і фізіялогіі чалавека ў VIII класе неабходным матэрыялам па многіх тэмах з'яўляецца лягушка. У VIII класе на лягушцы можна правесці такія работы як клетачнае дыханне, праца сэрца, крывезварот, работа нервовай сістэмы і інш.

Захаваць на зіму лягушак можна наступным чынам: у драўляную ці жасцяную судзіну, не важна якіх памераў (у вышыню да 50 см., толькі трэба ўлічваць прыблізна гэткае, каб на кожныя 10 кв. см. прыходзілася адна лягушка), насцілаюць сантыметраў 8 моху тарфянага, наліваюць вады да 1 см. (на дне судзіны пасля змочвання моху). Ставіць судзіны лепш за ўсё ў падвал ці пограб, дзе тэмпература не падупадае рэзкім хістанням і не спадае ніжэй 3°—4° С. Ловяць лягушак і змяшчаюць іх у дадзеную судзінку. Ні кармлення, ні іншага догляду лягушкі не патрабуюць, захоўваюцца жывымі ўсю зіму.

Зразумела, што ў гэтым кароценькім артыкуле далёка не ўсё вычарпана з таго, што можна прарабіць у сэнсе падрыхтоўкі к зіме, але мы лічылі-б сваю мэту дасягнутай, калі-б прыродаведы на першы раз нарыхтавалі хоць тое, што тут паказана.

Гэткая падрыхтоўка прынясе дваякую карысць: па-першае—збор і стварэнне ўмоў перазімоўкі таго ці іншага

арганізма прымусяць яшчэ раз, яшчэ з большаю ўвагаю прачытаць біялогію дадзенага, арганізма, і гэта будзе элемент падвышэння кваліфікацыі; па-другое, паверце, таварышы выкладчыкі, што калі вы правядзеце 2-3 урокі з гэткімі дэманстрацыямі і адпаведнымі лабараторнымі заняткамі, у вас з'явіцца патрэбнасць, проста неабходнасць, гэткім-жа метадам праводзіць 4-ы, 5-ы, 6-ы і кожны ўрок. Нагляданне канкрэтных аб'ектаў і з'яў выклікае ў дзяцей цікавасць і тыя адносіны к прадмету, якія мы называем „любоў прадмета"; вынікам апошняе з'явы будзе лепшае і больш свядомае засваенне, а гэта і будзе мэта, якую ставіць сабе выкладчык.

Нават невялічкая падрыхтоўка будзе амаль немагчыма для аднаго прыродаведа; дапамога дырэктара школы тут надзвычайна патрэбна і важна. Дапамагчы знайсці плошчу для змяшчэння экспанатаў, выдзеліць некаторую суму грошай на абсталяванне—пачэсны абавязак кожнага дырэктара школы, ад гэтага толькі выйграе школа—і дырэктар, і настаўнік, і вучні.

Дац. Штэрноў А. А., Сімановіч Н. М. і Ускова. А. Н.

Аб простых назіраннях флюктуацый шчыльнасці дысперснай сістэмы

У 1934 г. Андрэевым было апублікавана паведамленне[1], згодна якога існавала магчымасць назірання Броўнаўскага руху няўзброеным вокам. Пры гэтым выкарыстоўвалася дыфракцыйная карціна, якая ўзнікае пры адлюстраванні света ад металічнага шліфа, пакрытага тонкім пластам вадкасці. Аднак, у далейшым радам нямецкіх фізікаў было паказана, што дыфракцыя ўзнікае не ад руху асобных броўнаўскіх часціц, а ад руху пластоў вадкасці, абумоўленага ўнутранымі плынямі. У крайнім выпадку, пры адсутнасці апошніх, дыфракцыя выклікаецца флюктуацыяй шчыльнасці дысперснага асяроддзя.

Аўтары данага артыкула зрабілі ў гэтай галіне рад назіранняў, прычым выкарыстоўвалі не адлюстраваныя праменні, як рабіў Андрэеў, а праходзячыя, што значна аблягчае самы працэс назірання. Пры гэтым незалежна ад прычын (броўнаўскі рух, флюктуацыя і г. д.) назіраемай дыфракцыі ўказаныя ніжэй вопыты могуць служыць прыгожай ілюстрацыяй унутранага хаатычнага руху ў вадкім асяроддзі і з гэтай мэтай выкарыстоўвацца ў школьнай практыцы.

1. Аўтары бралі эмульсію, або ўзвес і налівалі яе тонкім пластам на гарызантальна-распалажаную шкляную пласцінку. Кропкавая крыніца свету давала з дапамогай дыяграмы вузкі пучок праменняў і асвятляла пласт вадкасці. Ход праменняў і размеркаванне прылад паказаны на рысунку 1.

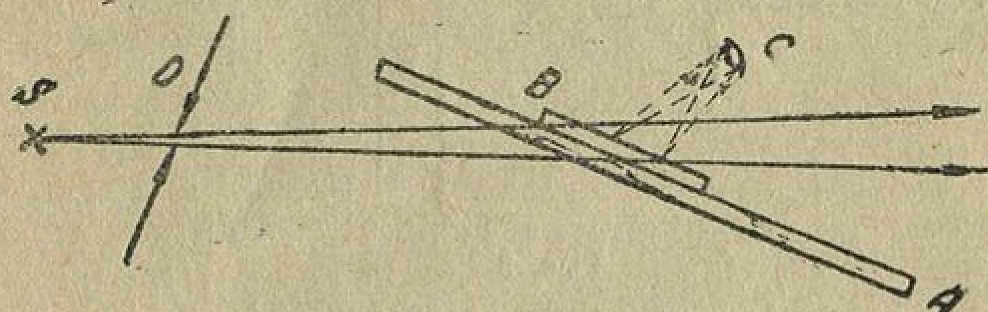
Вока назіральніка, як бачна з рыс., змяшчаецца так, каб у яго не пападалі роўныя праменні ад крыніцы. На малюнку 1-м вока змешчана вышэй прамога пучка, аднак, яго магчыма змясціць і ніжэй пучка. І ў тым, і ў другім выпадку ў вока пападаюць толькі рассеяныя праменні, якія ідуць ад асветленага поля ў пласту вадкасці. Пры назіранні

[1] „Даклады Акадэміі Навук СССР", 1934, т. I.

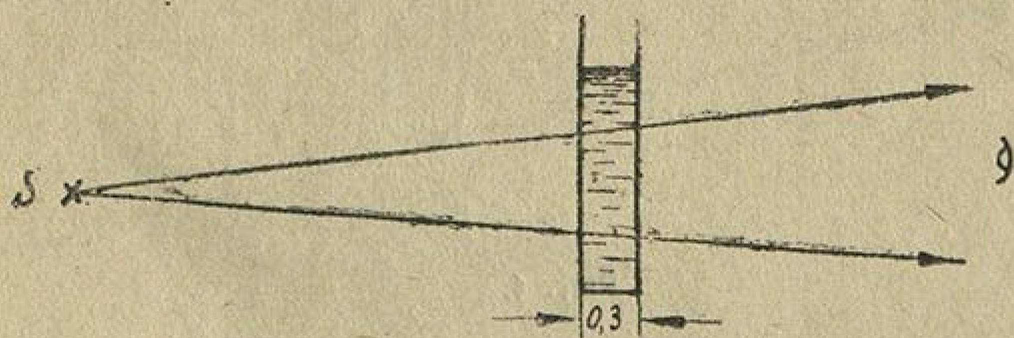
дастаткова добра прыкметна мярцанне асветленага ўчастка, што тлумачыцца рухам рассейваючых часціц. Асабліва яскрава прыкметна мярцанне на краях асветленага поля.

2. Паказаная з'ява ўскрываецца яшчэ ярчэй пры назіранні вадкасці ў шкляным начынні з плоска-паралельнымі сценкамі. Устаноўка паказана на рыс. 2.

Тут можна не карыстацца дыяфрагмай. Мярцанне заметна і ў тым выпадку, калі вока змешчана ў пучку прамога света. Начынне, відаць, не павінна быць вельмі шырока. Аўтары карысталіся начыннем, адлегласць між паралельнымі сценкамі якога была каля 0,3 см.



Рыс. 1.
А—шкло. В—вадкасць, С—вока назіральніка, S крыніца, D—дыяфрагма.



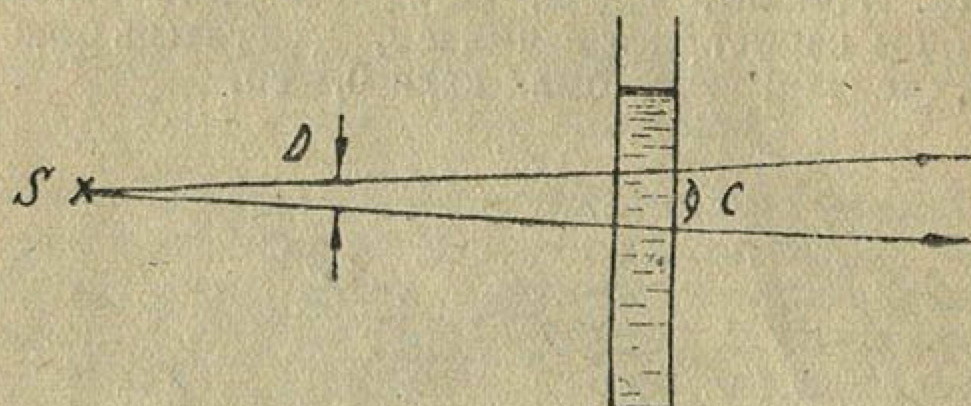
Рыс. 2.

3. Аўтары, урэшце, выкарысталі цыліндрычнае шкляное начынне і дабіліся цудоўнай карціны, пры якой было заметна не толькі мярцанне свету, якое выклікалася рухам броўнаўскіх часціц, але і як бы непасрэдны рух асобных часціц. Схема назірання паказана на рыс. 3.

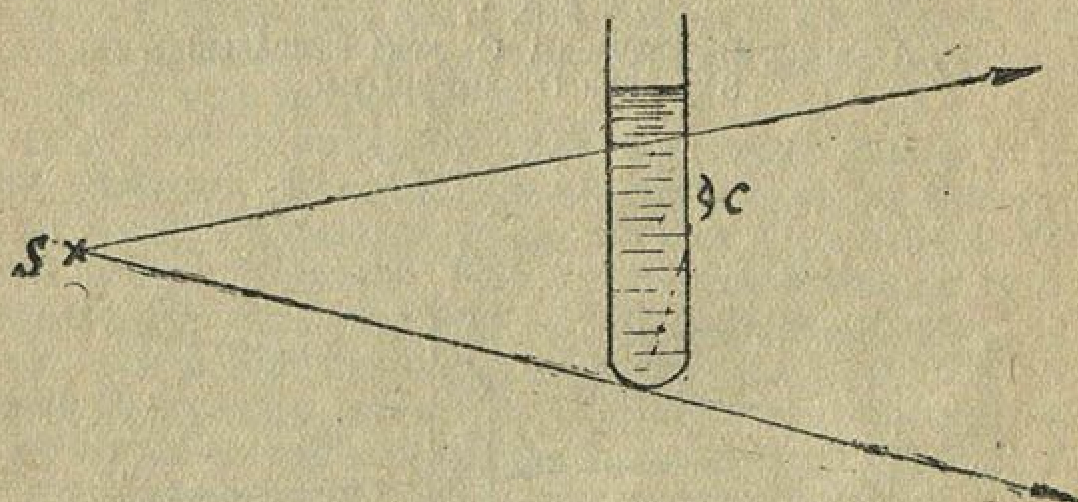
Лепш відаць—з дыяфрагмай, хоць апошняя і не абавязкова. Вока неабходна змяшчаць як мага бліжэй да паверхні цыліндрычнага начыння. Тады ўсё поле зроку дзеліцца ярка-асветленай паласой, якая прыходзіцца якраз

супроць вока, на дзве палавіны. І ў верхняй і ў ніжняй частцы асветленага поля прыкметны чорныя і каляровыя (ад праходзячай дыфракцыі) кропкі, якія знаходзяцца ў хаатычным руху. Пры добра падабранай канцэнтрацыі раствора рух можа назірацца вельмі доўга (да некалькіх гадзін).

4. Калі ў якасці цыліндрычнага начыння ўзяць звычайную хімічную прабірку, то ўказаную з'яву можна назіраць



Рыс. 3.



Рыс. 4.

супроць вока, але ўнізу прабіркі, на закругленым яе канцы. Пры гэтым, канечна, неабходна адпаведна скасіць вока ўніз (рыс. 4).

Вока зноў трымаць магчыма бліжэй да начыння і, перасоўваючы начынне (або вока) уверх і ўніз, дабіцца лепшай бачнасці.

5. Усе вышэйпаказаныя назіранні вытвараліся з рознымі вадкасцямі. Былі выкарыстаны: разбаўленае малако, растворы крухмала, гідрата вокісі жалеза, каніфолі і суспензіі вугалю. Трэба заўважыць, што ўдалыя назіранні могуць быць толькі пры некаторых пэўных канцэнтрацыях, якія дасягаліся аўтарамі шляхам паступовых разбаўленняў вадкасці.

Крыніцай света служыла 12 - вольтная (кацельная) лямпа.

Пры дэманстрацыі паказаных вопытаў мэтазгодна карыстацца не адным, а некалькімі начыннямі, размеркаванымі каля адной крыніцы. Гэта дасць магчымасць паказаць вопыты адначасова некалькім назіральнікам, што значна паскарае працэс назірання.

Функцыянальныя шкалы лагарыфмічнай лінейкі

Адным з найбольш практыкуемых у разліках масавых лічыльных інструментаў з'яўляецца лагарыфмічная лінейка. Выпуск іх за апошнія гады значна вырас, а разам з ім вырас і выпуск дапаможнікаў па вывучэнню лінейкі. Аднак, буйным недахопам гэтых дапаможнікаў з'яўляецца тое, што ў іх пытанні, звязаныя з тэарытычным абгрунтаваннем пабудовы лінейкі—пытанні пабудовы яе шкал, альбо зусім апушчаны, альбо развіты вельмі слаба. Між тым, няяснасць у прадстаўленні, як пабудавана шкала, пазбаўляе выкладчыка магчымасці даць вычарпальныя адказы на рад пытанняў, якія ўзнікаюць пры вылічэннях з дапамогай лінейкі.

Мэтай гэтага артыкула і будзе па магчымасці папоўніць адзначаны прабел і паказаць, што з сябе прадстаўляюць па сваёй пабудове тыя шкалы, якія нанесены на лагарыфмічнай лінейцы. Акрамя таго, наогул асноўныя прынцыпы выкладання ў сярэдняй школе патрабуюць, каб практычны бок навучання, якім з'яўляецца тэхніка аўладання лагарыфмічнай лінейкай, быў у належнай ступені абгрунтаван тэорыяй пытання. Гэтае тэарытычнае абгрунтаванне практыкі вывучэння лагарыфмічнай лінейкі ў сярэдняй школе і мае на мэце змяшчаемы артыкул.

I. Паняцце аб функцыянальнай шкале

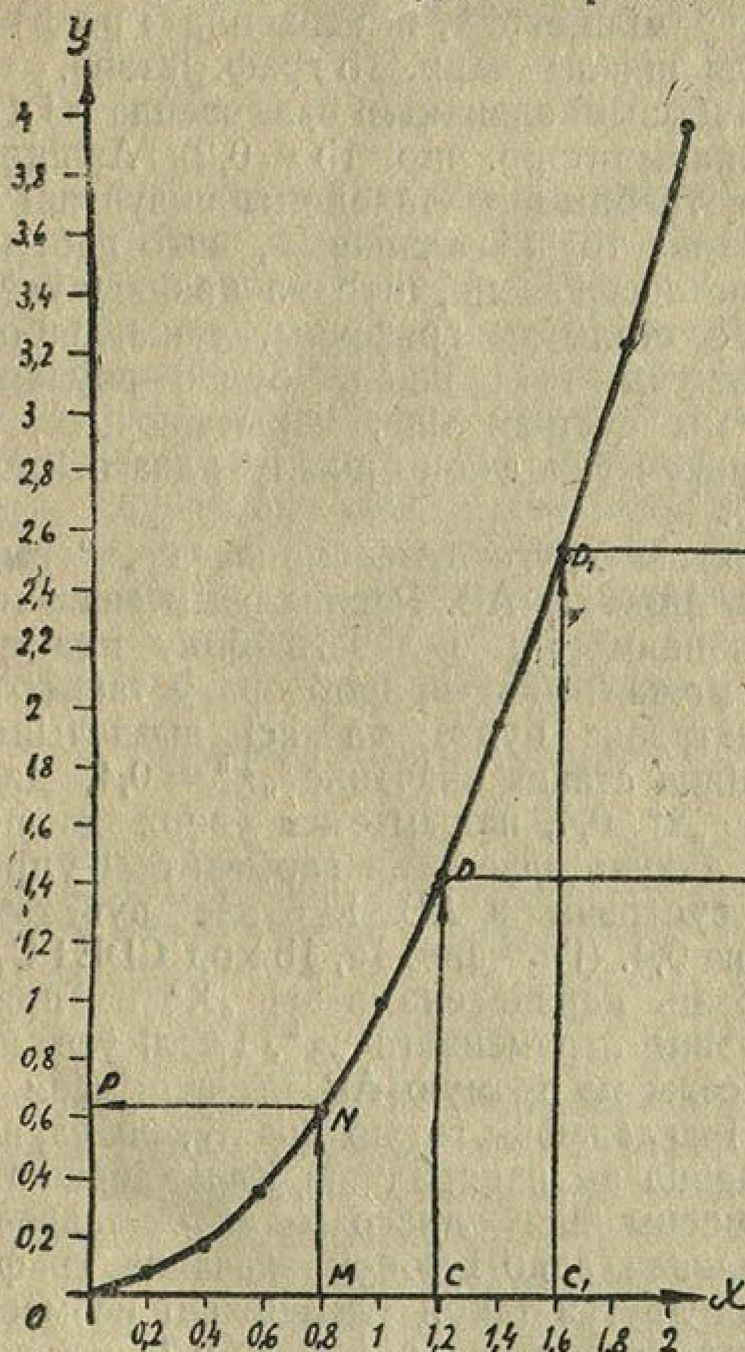
Няхай нам дана функцыя $y = x^2$. Складзем табліцу значэнняў аргумента і функцыі і вычарцім графік. Маштаб пры гэтым возьмем 25 мм у адзінцы (гл. чарц. 1а).

x =	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y =	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4

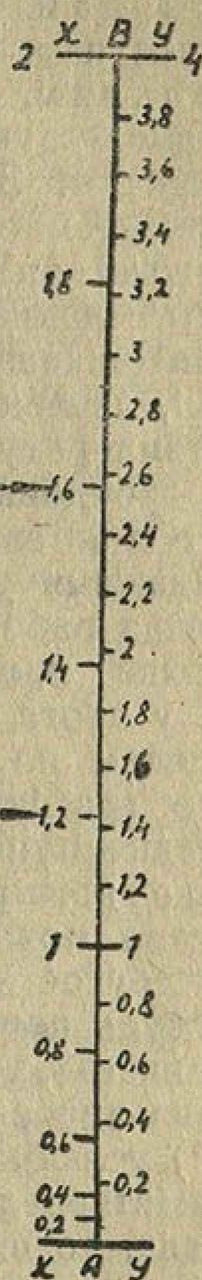
Атрыманы графік дае магчымасць знаходзіць значэнне адной пераменнай велічыні па значэнню другой. Напрыклад; $x = 0,8$, вылічыць чаму ровен „y". Адкладваем на асі „x" $= 0,8$, падымаемся ўверх па вертыкалі да перасячэння з графікам і, прайшоўшы ад пункта перасячэння па гары-

занталі ўлева да асі „у“, чытаем на ёй—0,64 (гл. ход MNP). (чарц. 1а).

Такім-жа самым чынам, даючы першапачатковае значэнне „у“, можна атрымаць адпавядаючае яму значэнне „х“. Але роль графіка гэтым не вычэрпваецца. Ён яшчэ дае нам наглядны вобраз змены адной пераменнай у залежнасці ад



Чарц. 1а



Чарц. 1b.

другой. Трэба адзначыць, што гэта апошняя роля графіка з практычнага боку з'яўляецца больш каштоўнай, чым першая, бо нельга сказаць, каб вылічэнні з дапамогай графіка былі дастаткова простыя. Для спецыяльна вылічальнай мэты можа быць пабудаваны больш просты і паскараючы вылічальны працэс графік.

Пакажам гэта. Правядзем з правага боку графіка прамую і назавем яе воссю. (Гл. чарц. 1b). На правы бок гэтай асі перанясем усе тыя дзяленні, якія нанесены на асі „у“.

Тады прамая AB з нанесенымі дзяленнямі, якія выражаюць значэнні пераменнай велічыні „у", і будзе называцца шкалой. Дзяленне шкалы наносіцца ў выглядзе штрыхоў, пры гэтым буйнымі штрыхамі і адзначаюцца, звычайна, большыя значэнні пераменнага, а дробнымі—дробныя. Адлегласць паміж двума радам стаячымі дзяленнямі (штрыхамі) шкалы, выражаная ў міліметрах, называецца графічным інтэрвалам. (Для шкалы чарц. Іb граф. інтэрв. = 5 мм). Розніца-ж паміж лічбовымі адзнакамі называецца лікавым інтэрвалам. (Лікавы інтэрв. чар. Іb = 0,2). Апошнія паняцці нам будуць патрэбны пры далейшым вывучэнні структуры шкалы. Зараз-жа толькі адзначым, што пабудаваная намі шкала мае тую асаблівасць, што на працягу ўсёй сваёй даўжыні яна мае сталы як графічны, так і лічбовы інтэрвалы. Інакш кажучы, гэта шкала будзе роўнамерная. З такімі шкаламі мы сустракаліся, карыстаючыся тэрмометрамі, дзяленні якіх і складаюць шкалу аднаго пераменнага (тэмпературы).

Для пабудовы шкалы другога пераменнага „х" выкарастаем тую-ж самую прамую AB. Распаложым значэнні „х", адпавядаючыя значэнням „у", з левага боку прамой AB. Уся гэтая работа можа быць праароблена ў такім парадку: няхай нам патрэбна будзе на асі вызначыць той пункт, у якога павінна стаяць значэнне „х" = 0,4, для чаго адкладваем па асі „х" 0,4, падымаемся ўверх да перасячэння з графікам, адкуль ідзем па гарызанталі ўправа да AB, тады пункт сустрэчы з AB і будзе пунктам „х", значэнне якога роўна 0,4. (Гл. чарц. Іа, Іb ход CDE і $C_1D_1E_1$).

Таксама можа быць перанесена з асі „X" на прамую і любое другое значэнне пераменнага „х". І калі ўсе значэнні „х" будуць перанесены на прамую AB, мы атрымаем шкалу пераменнага „х". Праглядаючы гэтую шкалу, мы заўважаем што яна адрозніваецца ад папярэдняй. Калі першая (шкала „у") у любым месцы для аднаго і таго-ж значэння лікавага інтэрвала давала адно і тое-ж значэнне графічнага інтэрвала, то шкала другая такой уласцівасці не мае. Тут, напрыклад, лікаваму інтэрвалу, роўнаму 0,2, на адрэзку шкалы 0,4—0,6 адпавядае графічны інтэрвал, роўны 5 мм, а на адрэзку 1,4,—1,6 будзе—15 мм. Адсюль другая шкала („х"), у адрозніванне ад першай—роўнамернай, будзе называцца шкалой няроўнамернай. Апошнюю акалічнасць трэба мець на ўвазе, асабліва пры вычэрчванні няроўнамернай шкалы, бо пры нанясенні прамежных дзяленняў у гэтым выпадку нельга карыстацца тым-жа прыёмам, што і пры вычэрчванні роўнамернай. Тут мы павінны памятаць, што любое значэнне „х" можа быць нанесена на шкалу толькі тады, калі будзе вылічан той адрэзак прамой AB, які адпавядае гэтаму значэнню.

Разгледзеўшы абедзве шкалы разам, мы заўважаем, што яны знаходзяцца ў строгай адпаведнасці адна адносна другой, г. зн., што пэўнаму значэнню „x“ адпавядае пэўнае значэнне „y“, якое можа быць вылічана па заданай функцыі.

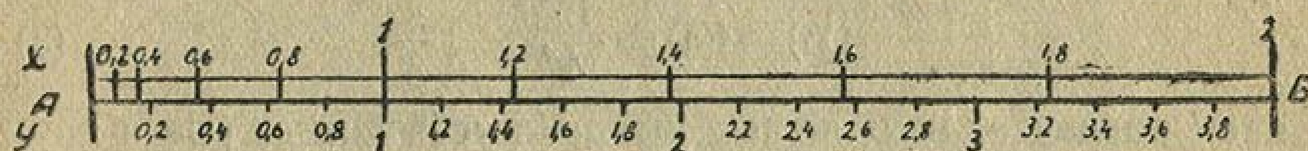
Прыклад: 1) Для $x = 0,6$ з правага боку шкалы чытаем—0,35
2) „ $x = 1,2$ „ „ „ „ „ 1,44
3) „ $x = 1,8$ „ „ „ „ „ 3,25

(гл. чарц. 2)

(Апошнія лічбы чытаюцца прыблізна).

Такім чынам абедзве шкалы, узятыя разам, даюць нам шкалу функцыі $y = x^2$. Гэтая шкала з'яўляецца ўжо шкалой двух пераменных, звязаных паміж сабой пэўнай функцыянальнай залежнасцю. Адсюль яе называюць функцыянальнай шкалой. Поўнае азначэнне гэтай шкалы можна даць такое: функцыянальнай шкалой называецца такое графічнае выражэнне функцыянальнай залежнасці пераменных „x“ і „y“, дзе лікавыя значэнні адной з іх (y), выражаюцца адрэзкамі, а адпавядаючыя значэнні другой (x) выражаюцца ў выглядзе лікавага рада (гл. чарц. 2). На чарц. №2 асобна пабудавана такая-ж шкала.

Функцыянальная шкала функцыі $y = x^2$



Чарц 2

Пры пабудове шкалы пераменнага „x“ на чарц. 1b мы па сутнасці так і рабілі, спачатку падымаючыся па вертыкалі да перасячэння з графікам, мы гэтым самым вызначалі той адрэзак, які адпавядае „y“, а потым у канцы гэтага адрэзка і выстаўлялі адпаведнае значэнне „x“. Графік у даным выпадку з'явіўся тым пераходным мосцікам, які нам дапамог перайсці ад вядомага графічнага спосабу выражэння функцыянальнай залежнасці да новага ў форме функцыянальнай шкалы. Роль яго, такім чынам, чыста метадычная. У далейшым пабудову шкал можна значна ўпрасціць, але для гэтага трэба ўстанавіць залежнасць паміж некаторымі паняццямі, звязанымі са шкалой.

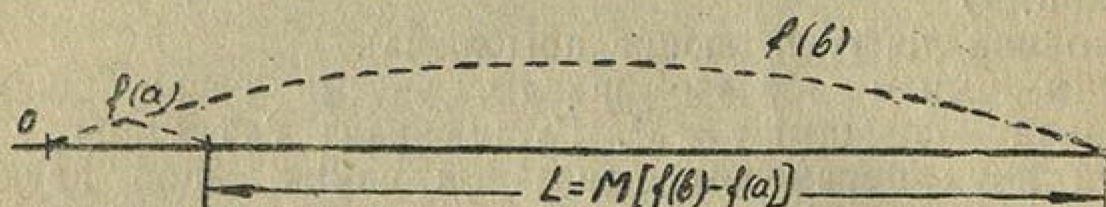
Маштабам шкалы, як вядома, будзе называцца тая колькасць міліметраў, якая змяшчаецца ў адзінцы шкалы. Адсюль, ведаючы колькасць адзінак, заключаных у шкале, альбо інтэрвал, для якога пабудавана шкала, можна вызначыць яе даўжыню. Напрыклад, ведаючы, што вычарчаная намі шкала (чарц. 2) па „y“ мае 4 адзінкі і маштаб 25 мм., можам

вызначыць яе даўжыню, як здабытак 25×4=100 мм. У агульным-жа выглядзе гэта можна запісаць так:

$$L = M_y\,[f(b) - f(a)],\ \text{альбо}\ L = M[f(b) - f(a)], \qquad (1)$$

дзе L—даўжыня шкалы,
M_y і M—маштаб роўнамернай шкалы,
f(b)—значэнне функцыі ў канцы інтэрвала (шкалы),
f(a)—значэнне функцыі ў пачатку інтэрвала (шкалы).

Графічна-ж гэта прадставіцца ў такім выглядзе:



Выражэнне (1) называюць ураўненнем шкалы. Яно дае магчымасць вылічаць адрэзкі роўнамернай шкалы для любога значэння аргумента з інтэрвала (a,b). З ураўнення шкалы мы можам атрымаць формулу для вызначэння маштаба.

$$M = \frac{L}{f(b) - f(a)}. \qquad (2)$$

Падзяліўшы-ж на маштаб левую частку ў формуле (1), мы атрымаем формулу:

$$f(b) - f(a) = \frac{L}{M}, \qquad (3)$$

якая вызначае, што лікавы інтэрвал усёй шкалы ровен даўжыні, падзеленай на маштаб. Калі замест „b“ і „a“ узяць значэнне „x“ супроць двух радам стаячых штрыхоў і замест L даўжыні ў міліметрах паміж узятымі штрыхамі, то атрымаем формулу залежнасці паміж лікавым інтэрвалам і графічным.

$$\text{Лікав. інтэрв.} = \frac{\text{графічн. інт.}}{\text{маштаб}}$$

Прыклад: вылічыць лікавы інтэрвал шкалы „y“ чарц. 2, калі вядома, што графічны яе інтэрвал ровен 5 мм. і маштаб 25 мм.

$$\text{Лікавы інт.} = \frac{5\ \text{мм}}{25\ \text{мм}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Пяройдзем зараз да разгляду пабудовы шкал лагарыфмічнай лінейкі.

II. Пабудова шкалы лагарыфмічнай функцыі

Няхай дадзена функцыя $y = \lg x$.

Перш за ўсё вызначаем тыя граніцы „x“, для якіх мы жадаем пабудаваць шкалу. Дапусцім, што такімі прэдзеламі „x“ будуць 1 і 10, тады функцыя „y“ будзе змяняцца ад

нуля да адзінкі. Адсюль, колькасць адзінак роўнамернай шкалы будзе роўна адзінцы. Маштабам для яе возьмем найбольш ужываемы ў практыцы роўны 100 мм альбо 250 мм у адзінцы. Складзем табліцу значэнняў аргумента і функцыі, пры гэтым усе значэнні „у" пры дапамозе ўраўнення шкалы (1)

$$L = M[f(b) - f(a)];\ y = 100\ [\lg x - \lg 1)$$

выразім у адрэзках.

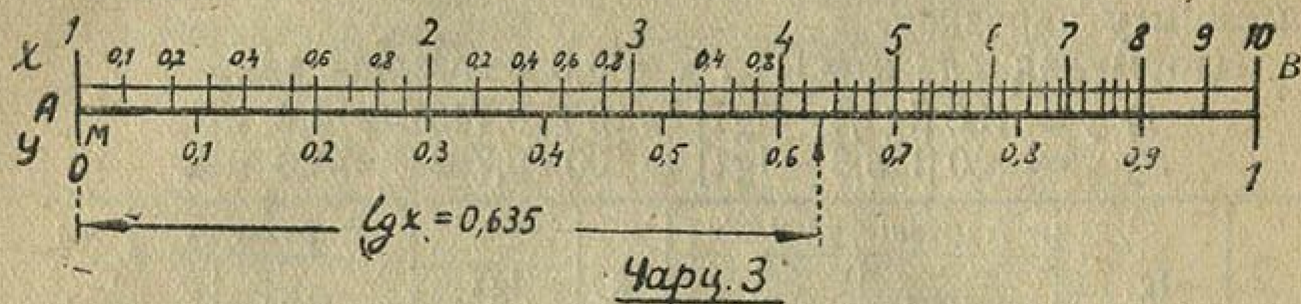
Напрыклад для $x = 1,4$ і $x = 5,8$ выразіцца так:

1) $y = 100\,[\lg 1,4 - \lg 1] = 100 \cdot 0,1461 \approx 14,6$ мм.
2) $y = 100\,[\lg 5,8 - \lg 1] = 100 \cdot 0,7634 \approx 76,3$ мм.

x	lgx	Адрэзкі „у" у мм		x	lgx	Адрэзкі „у" у мм	
		y = 100 lgx	y = 250 lgx			y = 100 lgx	y = 250 lgx
1	0	0	0	4,6	0,6628	66,3	
1,1	0,0414	4,1	10,4	4,8	0,6812	68,1	
1,2	0,0792	7,9	19,8	5	0,6990	69,9	
1,3	0,1139	11,4	28,5	5,2	0,7160	71,6	
1,4	0,1461	14,6	36,5	5,4	0,7324	73,2	
1,5	0,1761	17,6	44,0	5,6	0,7482	74,8	
1,6	0,2041	20,4	50,8	5,8	0,7634	76,3	
1,7	0,2304	23,0	57,6	6	0,7782	77,8	
1,8	0,2553	25,5	63,8	6,2	0,7924	79,2	
1,9	0,2778	27,9	69,7	6,4	0,8062	80,6	
2	0,3010	30,1	75,2	6,6	0,8195	82,0	
2,1	0,3222	32,2	80,6	6,8	0,8325	83,3	
2,2	0,3424	34,2	85,6	7	0,8451	84,5	
2,3	0,3617	36,2	90,4	7,2	0,8573	85,7	
2,4	0,3802	38,0	95,1	7,4	0,8692	86,9	
2,5	0,3979	39,8	99,5	7,6	0,8808	88,1	
2,6	0,4150	41,5	103,8	7,8	0,8921	89,2	
2,7	0,4314	43,1	107,9	8	0,9031	90,3	
2,8	0,4472	44,7	111,8	8,2	0,9138	91,4	
2,9	0,4624	46,2	115,6	8,4	0,9243	92,4	
3	0,4771	47,7	119,3	8,6	0,9345	93,5	
3,2	0,5051	50,5		8,8	0,9445	94,5	
3,4	0,5315	53,2		9	0,9542	95,4	
3,6	0,5563	55,6		9,2	0,9638	96,4	
3,8	0,5798	57,9		9,4	0,9731	97,3	
4	0,6021	60,2		9,6	0,9823	98,2	
4,2	0,6232	62,3		9,8	0,9912	99,1	
4,4	0,6435	64,4		10	1,0000	100	

У табліцы ўказаны два маштабы. Першы мы выкарыстаем для пабудовы ніжэйзмешчанай шкалы, другі-ж намі ўказан, як маштаб шкалы масавай лагарыфмічнай лінейкі „Прометей". Вылічэнні зроблены галоўным чынам для першага маштаба, для другога-ж яны могуць быць атрыманы ў выніку множання лагарыфма на 1000 і дзялення на 4, альбо ў выніку множання адрэзкаў, вылічаных па першаму маштабу, на 10 і дзялення на 4.

Пасля таго, як табліца гатова, праводзім прамую AB, бярэм яе за вось (аснову) і будуем знізу роўнамерную шкалу—**шкалу лагарыфмаў**, для чаго ўвесь адрэзак AB, які вызначае адзінку па „у“ (г. зн. AB = 100 мм), дзелім спачатку на 10 роўных частак, потым кожную дзесятую ў сваю чаргу на 10 роўных частак і кожную сотую папалам (гл. чарц. 3).



Чарц. 3

У выніку такога дзялення атрымаем шкалу лагарыфмаў лікаў, у якой найменшая адлегласць паміж двума радам стаячымі штрыхамі, г. зн. графічны інтэрвал якой будзе ровен 0,5 мм, а лікавы інтэрвал—0,005. Пры пабудове шкалы на міліметровай паперы наносіць усіх дзяленняў не трэба, бо сама сетка гэтай паперы дае мажлівасць адкласці на шкале той альбо іншы лік.

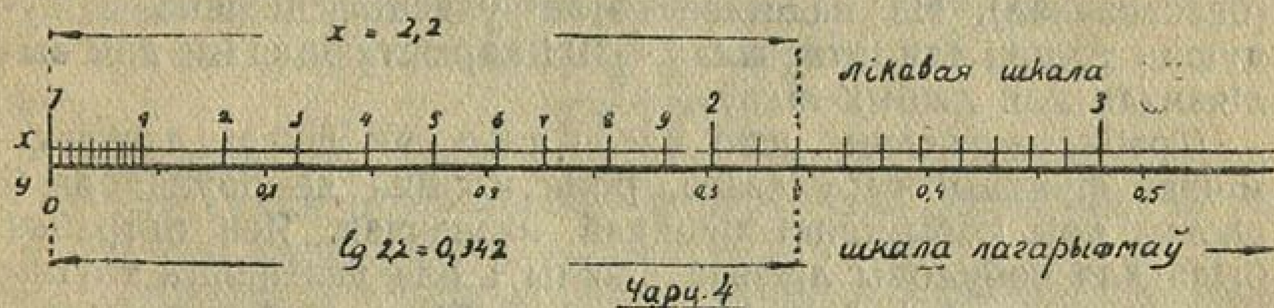
Так, на шкале чарц. 3 сотыя долі могуць быць адкладзены там, дзе прамую AB перасякае сетка міліметроўкі. Тысячныя-ж долі адкладваюцца на-вока. Надпіс дзяленняў роўнамернай шкалы належыць рабіць толькі для больш буйных, каб не рабіць яе цяжкай для чытання. На пабудаванай шкале можна адкласці мантысу лагарыфма любога ліку з дакладнасцю да 0,005. Так, лагарыфм роўны 0,635 на чарц. 3 паказан адрэзкам MN. Велічыня мантысы лагарыфма любога ліку будзе характарызавацца адзначаным адрэзкам шкалы.

Пяройдзем да пабудовы лікавай шкалы (x). Для гэтага спачатку наносім дзяленні, адпавядаючыя цэлым лікам—1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 пераменнага „x“. Кожны з гэтых лікаў надпісваем зверху прамой у канцы таго адрэзка, узятага па „у“ ад пункта A, які яму адпавядае па табліцы. Так, напрыклад, для 2 наносім дзяленне ў канцы адрэзка 30,1 мм, для 5 у канцы адрэзка 69,9 мм; 7—у канцы 84,5 мм. і г. д. (гл. табл. і чарц. 3). Гэта робім так таму, што лікі павінны стаяць супроць адпавядаючых ім лагарыфмаў, а лагарыфмы іх, як відаць з табліцы, выражаюцца ўказанымі адрэзкамі. Дзесятыя і далей сотыя і тысячныя долі належыць нанасіць на шкалу таксама, як і цэлыя. Пры гэтым, каб дзяленні шкалы не зліваліся, прапануецца ставіць іх з інтэрвалам у 0,5 мм. На падставе гэтага, на нашай шкале чарц. 3 мы не ў любым інтэрвале можам нанесці, напрыклад, нават дзесятыя долі. Так, у інтэрвале 1—2 нанесены дзяленні праз 0,1, у ін-

тэрвале 2—3 праз 0,2 і далей ўправа інтэрвалы становяцца ўсё карацей і карацей. Чытаецца шкала так: дапусцім, трэба прачытаць лік, які адпавядае лагарыфму 0,365, адкладваем на ніжняй шкале лагарыфм і зверху на шкале „x“ чытаем спачатку 2,2 і потым дадатак прыблізна 0,1, разам—2,3. Для набыцця тэхнікі карыстання шкалой трэба запомніць, чаму роўна найменьшае дзяленне ў кожным прамежку шкалы. Пры больш буйным маштабе (250 мм) магчыма ў некаторых інтэрвалах, як 1—2, нанесці сотыя долі „x“, што і зроблена на шкале лінейкі сістэмы „Прометей“. Дзяленні гэтай шкалы будуць такія:

1.	У інтэрвале	1— 2	самыя меншыя дзяленні—0,01
2.	„	2— 3, 3— 4	„ „ 0,02
3.	„	4— 5, 5— 6, 6— 7, 7— 8, 8— 9, 9—10	„ „ 0,05

Частка гэтай шкалы ад 1—3 паказана на чарц. 4 у натуральным размеры.



Чарц. 4

Пабудова яе такая самая, як і папярэдняй. Перавага-ж яе перад першай у тым, што яна дае магчымасць адкладваць на ёй сотыя, а на-вока нават і тысячныя долі. Што датычыцца роўнамернай яе шкалы, то, пры прынятым графічным інтэрвале ў 0,5 мм, яна дае магчымасць вылічаць лагарыфм з дакладнасцю да 0,002. Апошняя можа быць праверана пры дапамозе ўстаноўленай залежнасці (3).

$$\text{Лікав. інтэрв.} = \frac{\text{Граф. інт.}}{\text{маштаб}} = \frac{0,5}{250} = 0,002.$$

Дзякуючы такой дакладнасці, шкала лагарыфмічнай функцыі, вычарчаная ў маштабе 250 мм, замяняе сабой трохзначную табліцу лагарыфмаў. Не цяжка паказаць, што лагарыфмічная шкала ў адносінах размяшчэння штрыхоў (дзяленняў) ёсць шкала перыядычная, гэта азначае, што адлегласць паміж штрыхамі лікаў 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, узятых у першым інтэрвале 1—10, будзе роўна адлегласці паміж адпаведнымі лікамі, узятымі з інтэрвала кратнага 1—10, напрыклад, паміж лікамі з другога інтэрвала (10—100) 10, 20,

30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Пакажам гэта. Возьмем два лікі з інт-ла 1—10 x_1 і x_2. Палажэнне кожнага з іх будзе вызначацца адрэзкам, роўным вытвару lgx на маштаб.

Для першага $l_1 = M\lg x_1$
„ другога $l_2 = M\lg x_2$ (4)

Тады адлегласць паміж імі l будзе роўна

$$l = M(\lg x_1 - \lg x_2) \qquad (5)$$

Разгледзім, чаму будзе роўна адлегласць паміж лікамі $10^n x_1$, і $10^n x_2$, узятымі з другога інтэрвала кратнага першаму. Знаходзім гэту адлегласць аналагічна першай. Абазначым праз l_1' і l_2' адрэзкі, якія вызначаюць палажэнне кожнага з узятых лікаў. Тады:

$$l_1' = M\lg 10^n x_1 \text{ і } l_2' = M\lg 10^n x_2, \qquad (6)$$

а адлегласць паміж імі

$$' = M[\lg 10^n x_1 - \lg 10^n x_2] = M(n\lg 10 + \lg x_1 - n\lg 10 - \lg x_2) =$$
$$= M\lg x_1 - \lg x_2). \qquad (7)$$

Адкуль і вынікае, што ўказаныя адлегласці роўны, а значыць шкала будзе паўтарацца, г. зн. будзе перыядычнай (бесканечнай). На падставе гэтай уласцівасці шкалы будуюць толькі для інтэрвала 1—10 і карыстаюцца імі пры вылічэннях для любых лікаў.

Трэба адзначыць, што пасля таго, як шкала лагарыфмічнай функцыі пабудавана, роля ніжняй яе роўнамернай шкалы пры карыстанні лінейкай нязначная. Яна патрэбна была для пабудовы лікавай шкалы і для далейшага тлумачэння тых аперацый, якія будуць рабіцца з лікавымі шкаламі. Гэтая шкала з'яўляецца асноўнай у пабудове лагарыфмічнай лінейкі.

Карыстаючыся двума лікавымі шкаламі, можна множыць, дзяліць, вылічваць прамую і адваротную прапарцыянальнасць, развязваць квадратныя ўраўненні, а з дапамогай астатніх шкал лінейкі—цэлы рад новых аперацый.

III. Пабудова астатніх шкал лінейкі.

На пярэдняй старане лінейкі нанесены яшчэ дзве шкалы: адна шкала квадратаў, другая шкала кубаў тых лікаў, якія нанесены на разгледжанай намі лікавай шкале. Упэўніцца ў гэтым не цяжка. Зрабіўшы параўнанне другой і трэцяй шкалы з лікавай шкалою, мы заўважаем, што розніца паміж імі толькі ў адзінцы даўжыні, і пры гэтым адзінка даўжыні другой у два разы і адзінка даўжыні трэцяй у тры разы менш адзінкі даўжыні лікавай шкалы. Адсюль, калі за адзінку другой, альбо трэцяй ўзяць L, то тады лікавая шкала адпаведна можа быць выражана праз 2L, альбо 3L

(гл. чарц. 5). Абазначыўшы праз „у“ лікі другой шкалы і праз „х“ лікі першай, пры дапамозе бегунка лінейкі мы можам кожнаму ліку ў другой шкале паставіць адпавядаючы лік „х“ лікавай шкалы. Тады кожная пара лікаў „х“ і „у“ будуць стаяць на адной вертыкалі і супадаць, лагарыфмы іх выражаюцца адным і тым-жа адрэзкам; пачаткі шкал пры гэтым знаходзяцца на адной вертыкалі. Адсюль, выцякае такая роўнасць:

$$L\lg y = 2L\lg x, \text{ адкуль,}$$
$$\lg y = 2\lg x$$
$$y = x^2. \qquad (8)$$

Для трэцяй шкалы гэта выразіцца так:

$$L\lg y = 3L\lg x$$
$$\lg y = 3\lg x$$
$$y = x^3. \qquad (9)$$

Апошнія роўнасці (8, 9) нам і паказваюць, што другая шкала прадстаўляе шкалу квадратаў лікаў, а трэцяя шкалу кубаў. Гэтыя шкалы даюць магчымасць не толькі ўзвадзіць лікі ў ступень, але і здабываць квадратныя і кубічныя корані. На адваротнай (задняй) старане дзвіжка нанесены дзве шкалы і абазначаны адна праз S і другая праз T.

Шкала S выражае шкалу функцыі

$$y = \lg \sin\alpha.$$

Прычым, лагарыфмы сінусаў гэтай функцыі нанесены на той самай роўнамернай шкале, якая была намі вычарчана пры вычэрчванні лікавай шкалы.

Змешчана яна ўнізу пярэдняй стараны лінейкі. На дзвіжку з правага боку ад S змешчана шкала вугла α да 90°. Сувязь паміж шкалой вугла α і шкалой $\lg\sin\alpha$ такая самая, як і паміж лікавай шкалой і роўнамернай.

Для кожнага значэння вугла α адпавядае пэўнае значэнне $\lg\sin\alpha$, прычым значэнне вугла і значэнне $\lg\sin\alpha$ гэтага вугла размяшчаюцца на адной вертыкалі. Аднак, пры вылічэннях шкалой лагарыфмаў не карыстаюцца і замяняюць яе лікавай шкалой. Робіцца гэта на падставе ўстаноўленай залежнасці паміж шкалой вугла і лікавай. Пакажам яе. Калі абедзве шкалы пастаўлены ў такое палажэнне, што маюць адзін пачатак, то для кожнага значэння α можна прывесці адпаведнае значэнне „х“ лікавай шкалы, распалажанай на адной вертыкалі. Лагарыфмы лікаў шкалы X і $\lg\sin\alpha$ будуць выражацца адным і тым-жа адрэзкам, значыць:

$$\lg x = \lg\sin\alpha \text{ і}$$
$$x = \sin\alpha. \qquad (10)$$

Такім чынам, лікавая шкала ў даным выпадку з'яўляецца шкалой значэння сінуса і, значыцца, пры вылічэнні замяняе

сабой табліцу натуральных значэнняў сінуса. Ніжняя, абазначаная праз Т, шкала прадстаўляе шкалу функцыі

$$y = \lg \operatorname{tg} \alpha$$

з адзінкай даўжыні шкалы ў два разы больш, чым у верхняй, але затое з меншымі граніцамі змянення вугла (да 45°). Сувязь яе з лікавай шкалой ўстанаўліваецца аналагічна першай.

Адкуль

$$\lg x = \lg \operatorname{tg} \alpha$$

$$x = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (11)$$

Акрамя гэтых двух шкал, у сярэдзіне дзвіжка нанесена агульная шкала для малых значэнняў аргумента сінуса і тангенса. Карыстанне ёй такое самае, як і папярэднімі.

Гэты тэарэтычны агляд пабудовы шкал павінен быць пакладзен у аснову пры праходжанні лагарыфмічнай лінейкі ў поўнай сярэдняй школе і толькі пасля гэтага можна пераходзіць да набыцця навыкаў па тэхніцы карыстання шкаламі пры вылічэннях на лагарыфмічнай лінейцы. Але на апошнім застанаўлівацца не будзем, бо гэта не дрэнна апісана ў любым з наступных дапаможнікаў:

1. Панов— „Счетная линейка".
2. Г. Фивегер и А. Бэр.—„Краткое общедоступное руководство к пользованию счетной линейкой".
3. Баскин Я. М. „Счетная линейка и логарифмы".
4. Брадис—„Теория и практика вычисления".

Праф. Міхалевіч Н. А.

Даследванне раўнанняў і задач ІІ-й ступені

Даная работа шчыльна прымыкае да такой-жа маёй работы, надрукаванай ў № 1-м „Метадычнага Лістка“ Гомельскага Пединститута за 1936 г., і прадстаўляе сабою метадычныя ўказанні па пытанню аб даследванні задач, рашаемых з дапамогай раўнанняў ІІ-й ступені ў агульным выглядзе, г. зн. з літарнымі каэфіцыентамі.

У № 1-м „Метадычнага Лістка“ мы ўжо высветлілі значэнне аддзела аб даследванні раўнанняў і задач у нашай сярэдняй школе. Тут толькі дададзім, што для выхавання творчай асобы правільнае праходжанне гэтага аддзела алгебры мае вялікае значэнне: тут на кожным кроку вучню прыходзіцца аналізаваць-сінтэзаваць і г. д.

Як-жа правадзіць гэтыя доследы раўнанняў і задач ІІ-й ступені ў 10-м класе?

Даная праца і з'яўляецца кароткім адказам на гэта пытанне ў дапамогу выкладчыку.

Даследванне раўнанняў і задач другой ступені можа мець або агульны, або прыватны характар. У данай працы мы разглядаем даследванне агульнага характару.

Калі задача прапанавана ў агульным выглядзе, г. зн. калі даныя велічыні ў задачы выражаны літарамі, то корань (або рашэнне) раўнання другой ступені, складзенага з умовы такой задачы, прадстаўляе сабою некаторае алгебраічнае выжэнне, маючае ў сваім складзе гэтыя літары. Калі гэтым літарам надаваць розныя прыватныя лікавыя значэнні, то карэнні раўнання ІІ-й ступені могуць прымаць значэнні: сапраўдныя няроўныя або роўныя, аднолькавых або розных знакаў, дадатныя і адмоўныя, мнімыя і г. д.

Што значыць даследваць раўнанне ІІ-й ступені? Даследваць раўнанне ІІ-й ступені—значыць разглядзець, пры якіх значэннях літар карэнні квадратнага раўнання будуць сапраўднымі няроўнымі або роўнымі, аднолькавых або розных знакаў, дадатнымі і адмоўнымі і г. д., і ўясніць значэнне гэтых выпадкаў для той задачы, з умоў якой раўнанне складзена.

І тут на апошнюю мэту звяртаем асаблівую ўвагу выкладчыкаў, бо наша задача—навучыць вучняў рашаць і да-

следваць не толькі раўнанні, а галоўным чынам, канкрэтныя задачы, канкрэтныя пытанні, зразумела пры дапамозе рашэння і даследвання раўнанняў.

ЛІТАРАТУРА: Киселев А. Алгебра, ч. II, отд. 8, §§ 136, 135. Проф. Чистяков И. И.—Методика алгебры, гл. XX, §§ 88, 89.

Пераходзім да выкладання самой працы. Спачатку напомнім некаторыя пытанні тэорыі, якая датычыцца знакаў карэнняў квадратнага раўнання, і толькі пасля гэтага разгледзім кіруючыя прыклады даследвання, якія дадзім разам з выкладаннем ходу даследвання, звяртаючы і тут увагу выкладчыкаў на вялікае значэнне высокаякаснага выкладання вучнямі сваіх думак: па матэматыцы вучні старэйшых класаў павінны ўмець напісаць укладанне таксама, як яны ўмеюць яго пісаць па мове. І задачы на даследванне раўнанняў у гэтых адносінах з'яўляюцца ўдалымі тэмамі.

Мы разгледзім доследы задач, якія прыводзяць да раўнанняў II-й ступені з адным невядомым і да сістэм з двума невядомымі.

1. Знакі карэнняў квадратнага раўнання.

Суадносіны між карэннямі і каэфіцыентамі квадратнага раўнання даюць магчымасць, не рашаючы квадратнага раўнання, указаць знакі і адносную велічыню сапраўдных карэнняў данага квадратнага раўнання.

§ 1. Маем раўнанне віду:

$$x^2+px+q=0 \qquad\Big|\qquad ax^2+bx+c=0.$$

Вядома, што карэнні гэтых раўнанняў выражаюцца суадпаведна формуламі:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad\Big|\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ці:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \end{cases} \qquad\Big|\qquad \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

§ 2. Атрымліваем:

I. Карэнні:

A. сапраўдныя няроўныя, калі:

$$\frac{p^2}{4}-q>0 \qquad\Big|\qquad b^2-4ac>0$$

B. Сапраўдныя роўныя, калі

$$\frac{p^2}{4}-q=0 \qquad\Big|\qquad b^2-4ac=0$$

C. Мнімыя, калі:

$\frac{p^2}{4} - q < 0$ | $b^2 - 4ac < 0$

§ 3. Маем:

$x^2 + px + q = 0$ | $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

§ 4. Атрымліваем:

II. Карэнні:

A. Аднолькавых знакаў, калі:

1) $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ | 1) $b^2 - 4ac \geqslant 0$

2) $q > 0$ | 2) $\frac{c}{a} > 0.$

Увага: Мнімыя (комплексныя) лікі не бываюць дадатныя і адмоўныя, а таму, калі гаворым аб карэннях „аднолькавых“ або „розных“ знакаў, то трэба памятаць, што гэтыя карэнні перш за ўсё павінны быць сапраўднымі.

B. Розных знакаў, калі:

1) $\frac{p^2}{4} - q > 0$ | 1) $b^2 - 4ac > 0$

2) $q < 0$ | 2) $\frac{c}{a} < 0.$

§ 5. Атрымліваем:

III. Карэнні:

A. Абодва дадатныя, калі:

1) $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ | 1) $b^2 - 4ac \geqslant 0$

2) $q > 0$ | 2) $\frac{c}{a} > 0$

3) $p < 0$ | 3) $\frac{b}{a} < 0$

B. Абодва адмоўныя, калі:

1) $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$ | 1) $b^2 - 4ac \geqslant 0$

2) $q > 0$ | 2) $\frac{c}{a} > 0$

3) $p > 0$ | 3) $\frac{b}{a} > 0.$

§ 6. Атрымліваем:

IV. Большую абсалютную велічыню мае корань:

А. Дадатны, калі:

1) $\frac{p^2}{4}-q>0$	1) $b^2-4ac>0$
2) $q<0$	2) $\frac{c}{a}<0$
3) $p<0$	3) $\frac{b}{a}<0$

В. Адмоўны, калі:

1) $\frac{p^2}{4}-q>0$	1) $b^2-4ac>0$
2) $q<0$	2) $\frac{c}{a}<0$
3) $p>0$	3) $\frac{b}{a}>0$.

§ 7. Атрымліваем:

V. Карэнні:

роўны па абсалютнай велічыні, але супроцьлеглы па знаку калі:

1) $\frac{p^2}{4}-q>0$	1) $b^2-4ac>0$
2) $q<0$	2) $\frac{c}{a}<0$
3) $p=0$	3) $\frac{b}{a}=0$

§ 8. Атрымліваем:

VI. Калі.

$q=0$	$\frac{c}{a}=0$

то раўнанне прымае від

$x^2+px=0$	$ax^2+bx=0$

адкуль

$x_1=0$ і $x_2=-p$,	$x_1=0$ і $x_2=-\frac{b}{a}$,

г. зн. пры гэтай умове адзін корань ровен нулю, а другі мае знак сумы карэнняў.

2. Задачы на даследванне.

Задача 1-я. Два веласіпедысты накіраваліся адначасова з г. N па адным і тым-жа кірунку, першы праехаў *a км*, другі *b км*, прычым першы прабыў у дарозе на *t* гадзін

болей другога і праязджаў у гадзіну на *c км* болей другога. Колькі гадзін прабыў у дарозе першы веласіпедыст? Даследваць, пры якіх залежнасцях між *a*, *b*, *c* і *t* задача магчыма, г. зн. мае 2 або адзін адказ, і праверыць задачу пры $a = 24$ *км*, $b = 8$ *км*, $c - 4$ *км* і $t = 1$ гадз.

Выкладанне ходу рашэння і даследвання задачы.

Рашэнне І. Перш за ўсё установім, якія з даных ва ўмове лікаў будзем лічыць дадатнымі і якія адмоўнымі, і якія могуць быць тымі і другімі.

Відаць, лікі *a* і *b*—дадатны, таму што яны выражаюць толькі размер пуці: лікі-ж *c* і *t* могуць быць і дадатнымі і адмоўнымі, бо яны могуць выражаць не толькі размер велічыні, але і быць панімаемы ў задачы ў 2 супроцьлеглых сэнсах.

Такім чынам, *a* і *b* з'яўляюцца ў задачы лікамі дадатнымі, а *t* і *c* могуць быць і дадатнымі і адмоўнымі.

II. Калі абазначаны праз *x* гадз. часу, на працягу якіх першы веласіпедыст праехаў адлегласць *a км*, то $(x - t)$ гадзін будзе час, на працягу якога другі веласіпедыст праехаў адлегласць *b км*; таму лік $\frac{a}{x}$ *км* паказвае, колькі кілометраў у гадзіну праязджаў першы веласіпедыст, а $\frac{b}{x-t}$ *км*—колькі *км* у гадзіну праязджаў другі; па ўмове задачы павінна быць:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{x-t} + c.$$

Вызваліўшы раўнанне ад назоўнікаў і перанесшы ўсе члены ў адзін бок, атрымаем раўнанне:

$$cx^2 - (ct + a - b)x + at = 0. \qquad (1)$$

На падставе агульнай формулы для знаходжання карэняў квадратнага раўнання знаходзім:

$$x = \frac{ct + a - b \pm \sqrt{(ct + a - b)^2 - 4act}}{2c} \qquad (2)$$

Даследванне.

Установім цяпер між *a*, *b*, *c* і *t* тыя залежнасці, пры якіх задача магчыма, г. зн. мае два або адзін адказ.

Каб задача была магчыма, неабходна, каб карэнні раўнання x_1 і x_2 былі 1) сапраўднымі і 2) дадатнымі, бо *x* у задачы азначае сапраўдны і дадатны лік.

Значыць, трэба знайсці такія залежнасці між *a*, *b*, *c* і *t*, пры якіх абодва карэнні (2) раўнання (1) будуць сапраўд-

ымі і дадатнымі; гэтыя залежнасці і будуць умовамі магчымасці задачы.

Шукаем гэтыя залежнасці між *a*, *b*, *c* і *t*.

III. Трэба адрозніваць два выпадкі: 1) выпадак, калі абодва карэнні сапраўдныя дадатныя няроўныя; г. зн. калі задача мае два адказы; і 2) выпадак, калі абодва карэнні сапраўдныя дадатныя роўныя, г. зн. калі задача мае адзін адказ.

1) Карэнні сапраўдныя дадатныя няроўныя.

Каб карэнні былі сапраўднымі няроўнымі, неабходна і дастаткова, каб між *a*, *b*, *c* і *t* існавала залежнасць (каб дыскрымінант быў дадатным):

$$(ct+a-b)^2-4act>0,$$

або:

$$(ct+a-b)^2>4act. \tag{3}$$

Каб, апрача таго, абодва карэнні данага раўнання (1) мелі аднолькавыя знакі (г. зн. каб былі адначасова або абодва дадатнымі, або абодва адмоўнымі), неабходна і дастаткова, каб вольны член у раўнанні (г. зн. здабытак карэнняў)

$$x^2-\frac{ct+a-b}{c}x+\frac{at}{c}=0, \tag{4}$$

роўны выразу $\frac{at}{c}$, быў дадатным, г. зн. каб апрача ўмовы (3) выконвалася яшчэ ўмова:

$$\frac{at}{c}>0. \tag{5}$$

Каб, апрача гэтага, абодва карэнні раўнання (1) былі дадатнымі, неабходна і дастаткова, каб, апрача ўмоў (3) і (5), каэфіцыент пры першай ступені невядомага *x* у раўнанні (4) быў-бы адмоўным, г. зн. каб выконвалася яшчэ такая залежнасць:

$$-\frac{ct+a-b}{c}<0,$$

або, множачы абедзве часткі гэтай няроўнасці на (—1), атрымаем:

$$\frac{ct+a-b}{c}>0,$$

або:

$$t+\frac{a-b}{c}>0,$$

або:

$$t-\frac{b-a}{c}>0,$$

адкуль канчаткова:

$$t > \frac{b-a}{c}. \qquad (6)$$

Такім чынам, злучаючы ўмовы (3), (5) і (6) у адну групу, атрымаем, што абодва карэнні x_1 і x_2 будуць сапраўднымі няроўнымі і дадатнымі пры адначасовым існаванні між a, b, c і t наступных залежнасцей:

$$\begin{cases} (ct+a-b)^2 > 4act, \\ \frac{at}{c} > 0, \\ t > \frac{b-a}{c}. \end{cases} \qquad (7)$$

Пры існаванні між a, b, c і t гэтых залежнасцей задача магчыма, і мае два адказы, а іменна: першы веласіпедыст прабыў у дарозе або x_1, або x_2 гадзін.

Залежнасць $\frac{at}{c} > 0$ можна прывесці да болей простага віду, вызваліўшы гэту няроўнасць ад назоўніка. Жадаючы вызваліць гэту няроўнасць ад назоўніка, не маем права абедзве часткі няроўнасці множыць на c, бо c, як вышэй было сказана, можа быць лікам не толькі дадатным, але і адмоўным. Для вызвалення няроўнасці ад назоўніка спачатку замяняем знешні від гэтай няроўнасці такім:

$$\frac{atc}{c^2} > 0,$$

дзе назоўнік быў бы ўжо лікам дадатным (мы зрабілі назоўнік квадратам c^2), і толькі пасля гэтага можам вызваляць няроўнасць ад назоўніка. Цяпер замест няроўнасці $\frac{at}{c} > 0$ атрымаем такую няроўнасць: $atc > 0$, так што знойдзеную вышэй групу ўмоў цяпер можна перапісаць так:

$$\begin{cases} (ct+a-b)^2 > 4act \\ act > 0 \\ t > \frac{b-a}{c}. \end{cases} \qquad (8)$$

Пры захаванні гэтых умоў, як ужо сказана, абодва рашэнні (2) раўнання (1) будуць сапраўднымі няроўнымі дадатнымі, і задача будзе мець два адказы.

Утворым цяпер праверку задачы пры даных у яе ўмове лікавых значэннях літар a, b, c і t.

„Праверыць задачу пры $a=24$, $b=8$, $c=4$, $t=1$"—гэта значыць, па-першае, падставіць даныя лікавыя значэнні

$a=24$, $b=8$, $c=4$, $t=1$ у залежнасць (8) і паглядзець, ці выконваецца (г. зн. ці захоўваецца знак няроўнасці між левай і правай часткамі кожнай няроўнасці, калі падставіць даныя лікі замест літар) гэтыя залежнасці або не выконваюцца пры даных лікавых значэннях літар; калі яны выконваюцца, то мы заранеЙ сцвярджаем, што абодва карэнні будуць сапраўднымі няроўнымі дадатнымі; калі-ж не выконваюцца, то карэнні не будуць такімі: па-другое, пасля вынесенага такім чынам, на падставе залежнасцей (8), заключэння мы павінны непасрэдна з агульнай формулы (2) упэўніцца, што пры даных лікавых значэннях літар карэнні будуць такімі, якімі яны павінны быць на падставе залежнасцей (8), і па-трэцяе, упэўніцца, што задача пры гэтых умовах мае два адказы.

Такім чынам, праверым задачу пры $a=24$, $b=8$, $c=4$ і $t=1$.

Для гэтага, па-першае, паглядзім, ці выконваюцца для даных лікавых значэнняў a, b, c і t залежнасці (8). Падстаўляючы гэтыя лікавыя значэнні ў залежнасці (8), атрымліваем:

$$\begin{cases} (4\cdot 1+24-8)^2>4\cdot 24\cdot 4\cdot 1 \\ 24\cdot 4\cdot 1>0 \\ 1>\dfrac{8-24}{4}, \end{cases}$$

або:

$$\begin{cases} 400>384 \\ 96>0 \\ 1>-4, \end{cases}$$

гэта значыць залежнасці (8) выконваюцца; на падставе апошняга, заранеЙ сцвярджаем, што абодва карэнні x_1 і x_2 пры ўзятых лікавых значэннях a, b, c і t будуць сапраўдныя няроўныя дадатныя.

І сапраўды, па-другое, падстаўляючы ў агульную формулу (2) значэнні $a=24$, $b=8$, $c=4$ і $t=1$, мы непасрэдным вылічэннем па формулах (2) упэўніваемся, што карэнні раўнання (1) пры даных лікавых значэннях a, b, c і t будуць сапраўднымі няроўнымі дадатнымі, бо атрымаем:

$$x_1=\frac{4\cdot 1+24-8+\sqrt{(4\cdot 1+24-8)^2-4\cdot 24\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{20+4}{8}=3$$

і

$$x_2=\frac{20-4}{8}=2,$$

гэта значыць абодва карэнні $x_1=3$ і $x_2=2$ сапраўды са-

праўдныя дадатныя няроўныя, што мы і прадбачылі загадзя на падставе выканання залежнасцей (8).

Зразумела, па-трэцяе, што задача атрымлівае два адказы: 1-ы веласіпедыст прабыў у дарозе або 3 гадз., або дзве гадз.

2) Карэнні сапраўдныя дадатныя роўныя.

Каб карэнні былі сапраўднымі роўнымі, неабходна і дастаткова, каб

$$(ct+a-b)^2-4\,act=0,$$

або

$$(ct+a-b)^2=4\,act, \qquad (9)$$

у гэтым выпадку: $x=\frac{ct+a-b}{2c}$.

Каб гэтыя роўныя сапраўдныя карэнні былі і дадатнымі, неабходна і дастаткова, каб апрача залежнасці (9) існавала яшчэ залежнасць:

$$x>0,$$

г. зн.

$$\frac{ct+a-b}{2c}>0,$$

або:

$$\frac{c\,(ct+a-b)}{2c^2}>0,$$

або:

$$c\,(ct+a-b)>0. \qquad (10)$$

Злучаючы ўмовы (9) і (10) у адну групу, атрымаем наступныя залежнасці між a, b, c і t для таго, каб карэнні былі сапраўднымі дадатнымі роўнымі:

$$\begin{cases}(ct+a-b)^2=4\,act\\ c\,(ct+a-b)>0\end{cases} \qquad (11)$$

Напрыклад, пры $a=32$, $b=18$, $c=2$, $t=1$ залежнасці (11) выконваюцца, так як:

$$\begin{cases}(2\cdot1+32-18)^2=4\cdot32\cdot2\cdot1\\ 2\,(2\cdot1+32-18)>0,\end{cases}$$

або:

$$\begin{cases}16^2=256\\ 32>0,\end{cases}$$

а таму мы загадзя сцвярджаем, што пры такіх лікавых даных карэнні будуць сапраўднымі роўнымі дадатнымі.

І сапраўды, з агульнай формулы (2) атрымліваем:

$$x_1=\frac{(2\cdot1+32-18)+\sqrt{(2\cdot1+32-18)^2-4\cdot32\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{16+0}{4}=4$$

і

$$x_2=\frac{16-0}{4}=4,$$

г. значыць сапраўды карэнні атрымаліся сапраўднымі дадатнымі роўнымі, аб чым мы ўжо ведалі загадзя на падставе выканальнасці залежнасцей (11).

У гэтым выпадку задача атрымае адзін адказ: першы веласіпедыст прабыў у дарозе 4 гадзіны.

Задача 2. Лічачы a, b і c дадатнымі лікамі, азначыць, якія ў раўнання $cx^2 - bcx - ab = 0$ карэнні: сапраўдныя або мнімыя, ці дадатныя або іншыя?

Данае раўнанне мае такія карэнні:

$$x = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 + 4\ abc}}{2c}$$

Так як падрадыкальны выраз$(b^2c^2 + 4\ abc)$ дадатны ($a, в, c$ дадатны па ўмове задачы), то абодва рашэнні сапраўдныя няроўныя.

Так як, апрача таго, вольны член раўнання:

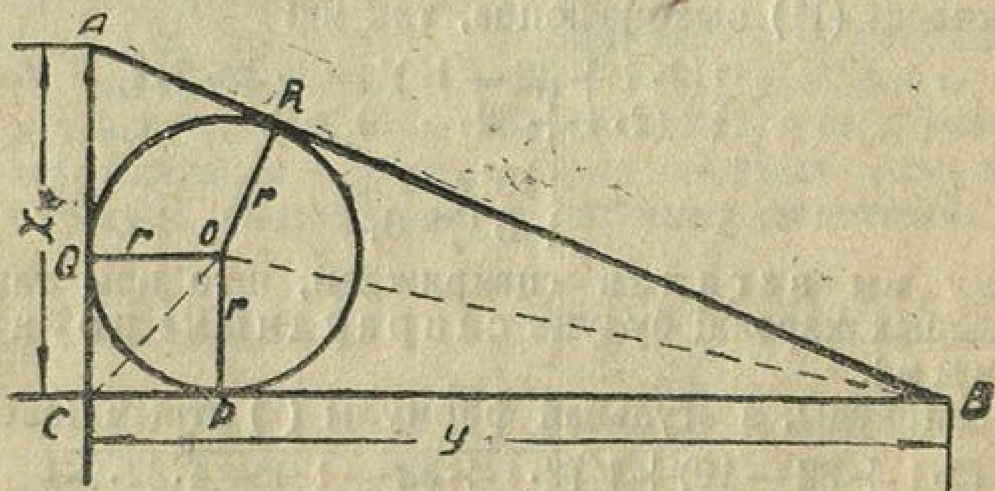
$$x^2 - bx - \frac{ab}{c} = 0,$$

роўны выразу $\left(-\frac{ab}{c}\right)$, — адмоўны, то здабытак карэняў адмоўны, г. зн. карэнні маюць розныя знакі.

Так як, апрача таго, у апошнім раўнанні каэфіцыент пры x (г. зн. $-в$) адмоўны, то сума карэнняў дадатная, а таму большую абсалютную велічыню мае дадатны корань.

Такім чынам, раўнанне пры дадатных a, $в$, c і t мае карэнні сапраўдныя няроўныя розных знакаў, прычым дадатны корань мае большую абсалютную велічыню.

Задача 3. Знайсці катэты прамавугольнага трохвугольніка па данай гіпатэнузе a і радыусу ўпісанага круга r. Даследваць, пры якіх суадносінах a і r задача магчыма, і праверыць задачу пры $a = 5$ *дм* і $r = 1$ *дм*.



Рашэнне. Няхай у прамавугольны $\triangle ABC$ з гіпатэнузай $AB = a$ упісан круг радыуса r. Як вядома з геаметрыі, цэнтрам гэтага круга будзе пункт O перасячэння бісектрыс

унутраных вуглоў $\triangle ABC$. Няхай акружыня датычыцца бакоў трохвугольніка ў пунктах P, Q і R.

Тады перпендыкуляры OP, OQ, OR, апушчаныя з цэнтра O на бакі трохвугольніка ABC будуць радыусамі ўпісанага ў трохвугольнік круга; а так як, апрача таго, фігура CQOP будзе квадратам, то будзе:

$$CQ = OP = CP = OQ = r.$$

Абазначым невядомыя катэты $AC = x$ і $BC = y$, і складзем раўнанні для знаходжання іх.

Па ўласцівасці адрэзкаў датычных, праведзеных да акружыні з аднаго пункта, узятага па-за кругам, маем:

$$AQ = AR \text{ і } BP = BR;$$

пачленна складваючы гэтыя раўнанні, атрымліваем:

$$AQ + BP = AR + BR,$$

або:

$$AQ + BP = AB,$$

або:

$$AQ + BP = a.$$

Але:

$$AQ = AC - CQ = x - r,\ BP = BC - CP = y - r,$$

а таму, з аднаго боку, маем:

$$x - r + y - r = a,$$

адкуль канчаткова:

$$x + y = a + 2r.$$

З другога боку:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Такім чынам, шукаемыя катэты трохвугольніка ABC азначаюцца як карэнні сістэмы раўнанняў:

$$\begin{cases} x + y = a + 2r \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Узвысіўшы абедзве часткі першага раўнання ў квадрат і адняўшы пачленна ад яго абедзве часткі другога раўнання, атрымаем:

$$xy = 2ar + 2r^2.$$

Цяпер знаходжанне катэтаў трохвугольніка прыводзіцца да знаходжання карэнняў такой сістэмы раўнанняў:

$$\begin{cases} x + y = a + 2r \\ xy = 2ar + 2r^2. \end{cases}$$

Так як гэтыя раўнанні даюць суму і здабытак невядомых, то x і y можна разглядваць, як карэнні такога квадратнага раўнання:

$$Z^2 - (a + 2r) Z + 2ar + 2r^2 = 0, \quad (1)$$

адкуль маем:

$$Z_1 = \frac{a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}$$

і

$$Z_2 = \frac{a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}.$$

Адзін з гэтых карэнняў трэба прыняць за x, другі—за y, так што калі $x=Z_1$, то $y=Z_2$, а калі $x=Z_2$, то $y=Z_1$.

Так як абедзве пары карэнняў вызначаюць адзін і той-жа трохвугольнік, то для пэўнасці будзем лічыць, што

$$\left\{\begin{aligned} x = Z_1 &= \frac{a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2} \\ &\text{і} \\ y = Z_2 &= \frac{a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2} \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Даследванне

Разгледзім, пры якіх адносінах a да r задача магчыма.

Перш за ўсё азначаем, што лікі a і r дадатныя, таму што яны выражаюць толькі размер суадпаведна гіпатэнузы AB і радыуса OP. Таксама лікі x і y, як выражаючыя размер катэтаў, павінны быць лікамі дадатнымі, з прычыны чаго адшуканне ўмоў **магчымасці** задачы зводзіцца, з аднаго боку, да знаходжання ўмоў, пры якіх x і y будуць **адначасова дадатнымі**. З другога боку, x і y з'яўляюцца катэтамі трохвугольніка ABC; але кожны з катэтаў не можа перавышаць гіпатэнузы; значыць, знаходжанне ўмоў магчымасці задачы зводзіцца, з другога боку, да знаходжання ўмоў, пры якіх адначасова будзе:

$$x < a \text{ і } y < a. \qquad (3)$$

Такім чынам, каб задача была магчыма, неабходна, каб карэнні x і y былі 1) сапраўдны, 2) дадатны і 3) кожны меней a.

Знойдзем цяпер, пры якіх адносінах a да r карэнні x і y раўнання (1), з аднаго боку, будуць сапраўднымі і дадатнымі, а з другога—будуць задавальняць умовам (3), г. зн. пры якіх адносінах a да r задача будзе магчымай. Перш за ўсё знойдзем адносіны a да r, пры якіх x і y будуць адначасова дадатнымі.

Каб x і y былі дадатнымі, перш за ўсё яны павінны быць сапраўднымі, для чаго, у сілу (2), павінна выконвацца між a і r залежнасць:

$$a^2-4ar-4r^2 \geqslant 0. \qquad (4)$$

Далей, так як абодва даныя лікі a і r дадатныя, то вольны член $(2ar+2r^2)$ у раўнанні (1) таксама дадатны, г. зн. здабытак карэнняў x і y дадатны: значыць, пры захаванні ўмовы (4) абодва карэнні x і y будуць не толькі сапраўднымі, але маюць і аднолькавыя знакі.

Для азначэння таго, якія іменна знакі ($+$ або $-$) маюць карэнні, звернем увагу на каэфіцыент пры першай ступені невядомага ў раўнанні (1), узяты з супроцьлеглым знакам; ён равен выразу $(a+2r)$, які, як відна, з'яўляецца дадатным лікам; значыць, сума карэнняў дадатная; таму аднолькавыя знакі ў карэнняў павінны быць плюсы.

Такім чынам, пры захаванні між a і r залежнасці (4) карэнні x і y будуць дадатнымі.

Знойдзем з залежнасці (4) адносіны a да r.

Раздзяліўшы на дадатны лік r^2 абедзве часткі няроўнасці (4), атрымаем:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2-4\left(\frac{a}{r}\right)-4\geqslant 0. \qquad (5)$$

Раскладзем на множнікаў трохчлен, які стаіць тут у левай часткі; для гэтага шукаем яго карэнні:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2-4\left(\frac{a}{r}\right)-4=0,$$

адкуль:
$$\begin{cases}\frac{a}{r}=2+2\sqrt{2}=2.(1+\sqrt{2})\\ \text{і}\quad \frac{a}{r}=2-2\sqrt{2}=2.(1-\sqrt{2}),\end{cases}$$

у моц чаго:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2-4\left(\frac{a}{r}\right)-4=\left[\frac{a}{r}-2\cdot(1+\sqrt{2})\right]\cdot\left[\frac{a}{r}-2.(1-\sqrt{2})\right],$$

а таму залежнасць (5) атрымае від:

$$\left[\frac{a}{r}-2\cdot(1+\sqrt{2})\right]\cdot\left[\frac{a}{r}-2\cdot(1-\sqrt{2})\right]\geqslant 0.$$

Так як множнік

$$\left[\frac{a}{r}-2\cdot(1-\sqrt{2})\right]$$

роўны

$$\left[\frac{a}{r}+2\cdot(\sqrt{2}-1)\right]$$

дадатны (таму што $a>0$, $r>0$ і $\sqrt{2}>1$), то на яго можна раздзяліць абедзве часткі апошняй няроўнасці; атрымаем:

$$\frac{a}{r}-2\cdot(1+\sqrt{2})\geqslant 0,$$

адкуль канчаткова маем:

$$\frac{a}{r} \geqslant 2 \cdot (1+\sqrt{2}). \qquad (6)$$

Такім чынам, каб x і y былі дадатнымі, адносіны a да r павінны задавальняць умове (6).

Але для магчымасці задачы трэба не толькі, каб карэнні x і y былі дадатнымі, а каб яшчэ кожны з іх задавальняў умове (3).

Пакажам, што калі між a і r выконваецца залежнасць (6), то будуць выконвацца і залежнасці (3), г. зн., што і x і y кожны будзе меней a.

Сапраўды, з аднаго боку, пры выкананні ўмоў (6) карэнні x і y дадатны, а з другога—яны задавальняюць роўнасці $x^2+y^2=a^2$, якая пры дадатных x і y магчыма толькі тады, калі кожны з лікаў x і y меней a.

Такім чынам, у выпадку выканальнасці залежнасці (6) выконваюцца і залежнасці (3), г. зн. калі карэнні x і y дадатны, то абавязкова кожны з іх будзе і меней a, а таму, калі выконваецца залежнасць (6), то задача магчыма.

Такім чынам, для магчымасці задачы дастаткова, каб адносіны a да r задавальнялі ўмове:

$$\frac{a}{r} \geqslant 2 \cdot (1+\sqrt{2}).$$

Толькі пры захаванні гэтай залежнасці між лікавымі значэннямі a і r можна знайсці катэты x і y трохвугольніка.

Праверым задачу ў прыватным выпадку пры $a=5$ дм і $r=1$ дм.

Так як праверка задачы падрабязна распрацавана вышэй ў задачы 1, то тут абмяжуемся толькі кароткімі заўвагамі.

Падставім у залежнасць (6) даныя лікавыя значэнні $a=5$ і $r=1$; атрымаем:

$$\frac{5}{1} > 2 \cdot (1+\sqrt{2}),$$

так як $2\frac{1}{4} > 2$

$$\frac{9}{4} > 2$$

$$\frac{3}{2} > \sqrt{2}$$

$$\frac{5}{2} > 1+\sqrt{2}$$

$$\frac{5}{1} > 2\,(1+\sqrt{2}).$$

Такім чынам, у гэтым прыватным выпадку залежнасці (6) выконваюцца, а таму загадзя сцвярджаем, што пры даных лікавых значэннях $a=5$ і $r=1$ задача магчыма, г. зн., што, з аднаго боку, карэнні x і y—дадатныя, а з другога—кожны з іх меней 5 (г. зн. меней a).

І сапраўды, непасрэднае вылічэнне x і y па формулах (2) дае:

$$x=\frac{5+2+\sqrt{25-4-20}}{2}=4$$

і $y=3$.

Такім чынам, катэты данага трохвугольніка ў гэтым прыватным выпадку пры $a=5$ дм і $r=1$ дм такія: або $x=4$ дм і $y=3$ дм, або $x=3$ дм і $y=4$ дм; у абодвух выпадках атрымліваем адзін і той-жа трохвугольнік.

Разгледзім яшчэ адну аналагічную задачу, але дадзім кароткае выкладанне ходу доследу.

Задача 4. На даным адрэзку $AB=a$ знайсці пункт, каб сума квадратаў адлегласцей яе ад пунктаў A і B раўнялася квадрату данага адрэзку $CD=к$. Пры якіх адносінах a да $к$ задача магчыма?





Няхай M будзе шукаемы пункт. Мяркуючы $AM=x$ і $MB=y$, на падставе ўмовы задачы атрымліваем:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=к^2, \end{cases}$$

$$\text{адкуль: } xy=\frac{a^2-к^2}{2},$$

так што пытанне прыводзіцца да рашэння сістэмы раўнанняў

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2-к^2}{2}. \end{cases}$$

Цяпер x і y можна разглядваць, як карэнні раўнанняў:

$$Z^2-aZ+\frac{a^2-к^2}{2}=0,$$

адкуль атрымліваем:

$$x=Z_1=\frac{a+\sqrt{2к^2-a^2}}{2}$$

і

$$y=Z_2=\frac{a-\sqrt{2к^2-a^2}}{2}.$$

Каб задача была магчыма, трэба, каб, з аднаго боку, x і y былі дадатныя, а з другога—каб выконваліся адначасова ўмовы:

$$x<a \text{ і } y<a.$$

Каб карэнні x і y былі дадатнымі, павінны аднача́сова выконвацца залежнасці:

$$\begin{cases} 2к^2 - а^2 \geqslant 0 \\ \dfrac{а^2 - к^2}{2} > 0 \\ а > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Але лік a па сэнсу задачы з'яўляецца дадатным, а таму ў гэтай групе ўмоў трэцяя залежнасць адпадае, і застаюцца толькі першыя, з якіх першую ператвараем так:

$$(к\sqrt{2})^2 - а^2 \geqslant 0$$
$$(к\sqrt{2} + а)(к\sqrt{2} - а) \geqslant 0$$
$$к\sqrt{2} - а \geqslant 0$$

(на суму $к\sqrt{2} + а$ скарацілі няроўнасць, бо яна дадатная), адкуль: $к\sqrt{2} \geqslant а$, або так як $к$ дадатна, то канчаткова:

$$\sqrt{2} \geqslant \frac{а}{к};$$

а другую—так:

$$\frac{а^2 - к^2}{2} > 0$$
$$а^2 - к^2 > 0$$
$$(а + к)(а - к) > 0$$
$$а - к > 0$$
$$а > к$$
$$\frac{а}{к} > 1.$$

Такім чынам, замест групы залежнасцей (1) атрымаем групу:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \geqslant \dfrac{а}{к} \\ \dfrac{а}{к} > 1, \end{cases}$$

або канчаткова:

$$\sqrt{2} \geqslant \frac{а}{к} > 1. \quad (2)$$

Такім чынам, карэнні x і y будуць дадатныя, калі адносіны a да $к$ задавальняюць злучанай залежнасці (2).

Але пры выкананні ўмоў (2) кожны лік x і y не толькі будзе дадатны, але кожны будзе і меней a. Сапраўды, з аднаго боку, пры выкананні ўмоў (2) лікі x і y дадатны, а з другога—лікі x і y задавальняюць роўнасці $x + y = а$, дзе a таксама дадатна; але кожны з дадатных слагаемых меней іх сумы, а таму пры выкананні ўмоў (2) будзе: $x < а$ і $y < а$.

Такім чынам, задача магчыма, г. зн. магчыма на адрэзку AB знайсці шукаемы пункт M, толькі ў тым выпадку, калі адносіны адрэзка a да адрэзка k задавальняюць умове (2).

У заключэнне адзначым, што з падобных задач вучні павінны навучыцца даследваць не толькі карэнні квадратнага раўнання, але спецыяльна даследваць канкрэтныя умовы данага пытання.

Мы разгледзелі даследванне задач, якія прыводзяць да раўнанняў 2-й ступені з адным і двума невядомымі. Часамі даводзіцца праводзіць даследванне задач 2-й ступені, якія прыводзяць да сістэмы квадратных раўнанняў з 3-ма і больш невядомымі; апошняга пытання тут закранаць не будзем.

Праф. Нефедаў Н. І.

Прэснаводныя малюскі, як аб'ект экалагічных доследаў

Мэта гэтага артыкулу заключаецца ў аказанні некаторай дапамогі настаўнікам сярэдняй школы і студэнту Педагагічнага інстытута пры арганізацыі і правядзенні невялікай навукова-даследчай работы, якая не патрабуе вялікіх матэрыяльных страт і складанай апаратуры.

Працуючы ў галіне вывучэння экалогіі жывёл, займаючыся вывучэннем узаемаадносін, існуючых між арганізмам і асяроддзем, я паспрабую на канкрэтным прыкладзе паказаць некаторыя этапы працы, выходзячы з магчымасцей мясцовага вуза і любой сярэдняй школы. Мэтай дадзенай працы з'яўляецца вывучэнне экалогіі прэснаводных мяккацелых.

План працы:

1) Знаёмства з літаратурай, прысвечанай экалогіі прэснаводных Mollusca нашага краю.

2) Выбар вадаёмаў, належачых абследванню.

3) Апісанне вадаёмаў (іх палажэнне, плошча, глыбіня, расліннасць, агульнахімічны склад вады, які характарызуе ступень забруджанасці яе).

4) Збор навуковага матэрыялу ў пэўны прамежак часу з дапамогай звычайнага сачка.

Устанаўленне рабочай адзінкі па часу пры зборы матэрыялу надзвычайна важна, бо толькі пры гэтай умове будзем мець болей або меней параўнальныя матэрыялы.

5) Азначэнне відавога складу мяккацелых па вадаёмах.

6) Вывучэнне індывідуальнай зменчывасці асобных відаў, якія жывуць у розных вадаёмах.

7) Спробы вывучэння прычын, якія абумоўліваюць розніцу ў засяленні нашых станцый прэснаводнымі мяккацелымі.

8) Агульнае афармленне працы з выцякаючымі з яе заключэннямі.

Прыблізна па гэтаму плану мы і працавалі пры арганізацыі і правядзенні працы на тэму, указаную намі вышэй. Пункт доследаў—гор. Новазыбкаў. Апісанне вадаёмаў: чыгуначнага, інстытуцкага і тэатральнага дана раней („Метад. лісток" № 2). Карна—невялікі ручэй, па цячэнню якога і размешчан чыгуначны і інстытуцкі пруды; фауна прэснаводных мяккацелых г. Новазыбкава і яго аколіц да гэтага часу

доследам не падвяргалася. Такім чынам, наша праца, калі-б насіла толькі фаўністычны характар, тым не менш прадстаўляла-б з сябе вядомую каштоўнасць для навукі наогул і для школьнага працаўніка ў прыватнасці. Усім вядома, што пры вывучэнні класа бруханогіх увага вучняў канцэнтруецца на вінаградным смаўжу, які апісваецца ў стабільным падручніку па заалогіі, і якога не бачаць вучні з прычыны таго, што ў нашых краях ён не сустракаецца. Чаму-б не скарыстаць пры гэтым мясцовы матэрыял, дастаць які так лёгка ў любой колькасці.

Нашы доследы далі магчымасць устанавіць для вадаёмаў г. Новазыбкава і яго аколіц наступны спіс відаў прэснаводных мяккацелых:

1. Limnaea stagnalis L.—звычайны прудавік.
2. „ auricularia L.—вушкавы прудавік.
3. „ „ morpha ampla Hartm.
4. „ (Radix) ovata Drap—авальны прудавік.
5. „ „ „ m. obtusa Kob.
6. „ „ m. inflata „Kob.
7. „ (Stagnicola) palustris Müll m. peregriformis—балотны прудавік.
8. Planorbis (Planorbarius) corneus L.—рагавая катушка.
9. Planorbis planorbis L.
10. „ (Spiralina) vortex L.—катушка-скрутак.
11. „ (Bathyomphalmus Agassiz) contortus L.—скручаная катушка.
12. Planorbis (Guraulus Ag.) gredleri rossmaessleri Auersw.—катушка Росмеслера.
13. Viviparus viviparus L.—жыванараджаючая лужанка.
14. Bithynia leachi Shepp. subsp. inflata Hansen.—Бітынія.
15. Valvata (Cincinna) piscinalis Muller morpha borealis Milaschevitsch—закрыўка.
16. Volvata (Tropidina) pulchella Studer.—закрыўка.
17. Anodonta cygnea L. m. piscinalis Nils—бяззубка.
18. Sphaerium corneum L.—шароўка.
19. „ „ „ m. welterlundi Clessin.
20. Pisidium amnicum Müller.—гарошынка.

Такім чынам, прыведзеныя 16 відаў і 4 морфы прэснаводных мяккацелых для нашага пункта доследаў указваюцца ўпершыню.

Характар-жа размеркавання іх па асобных вадаёмах можна бачыць з прыведзенай ніжэй табліцы (1).

У табліцу ўключаны наступныя ўмоўныя абазначэнні:

+ віды дамінантныя—характэрныя і шырока распаўсюджаныя ў стацыі,

● віды другарадныя,

○ віды выпадковыя, знойдзеныя ў адзіночных экземплярах.

Табліца № 1.

Віды і морфы	Чыгу-начн. пруд	Інстыт-туцк. пруд	Тэатр.	Ручэй Карна
1. Vivipares viviparus	●	+	—	+
2. Limnaea auricularia m. ampla	—	○	—	●
3. Sphaerium corneum L.	+	●	—	●
4. Planorbis vortex L.	+	○	—	●
5. Limnaea stagnalis L.	●	+	○	○
6. L. ovata m. inflata Kob.	●	○	○	●
7. Planorbis contortus	●	○	—	○
8. Limnaea auricularia	●	—	—	—
9. Anodonta cygnea m. piscinalis. . . .	●	—	—	—
10. Planorbis corneus	○	●	—	○
11. Volvata piscinalis m. borealis	○	●	—	●
12. Limnaea ovata	—	●	—	○
13. „ „ m. obtusa	—	—	—	○
14. Planorbis planorbis	○	○	—	○
15. Pisidium amnicum	—	—	—	○
16. Planorbis gredleri rossmaessleri . .	○	○	—	○
17. Limnaca palustris m. peregriformis .	○	○	—	—
18. Bithynia leachi subsp. inflata	—	○	—	—
19. Valvata pulchella	○	—	—	—
20. Sphaerium corneum m. westerlundi .	+	●	—	●
Усяго:	15	15	2	14

З прыведзенай табліцы відаць, што фауна мяккацелых чыгуначнага

пруда прадстаўлена	3 дамін.,	6 другарадн.	і 6	выпадковых відаў
Інстытуцкага „	2 „	5 „	8 „	„
Тэатральнага „	— „	— „	2 „	„
Ручая Карны „	1 „	5 „	8 „	„

Значыць, па найбольшай заселенасці мяккацелымі як у якасных так і колькасных адносінах асабліва вылучаецца чыгуначны пруд, а па найменшай—тэатральны. Апошні амаль не засяляецца, калі не лічыць 2 выпадковых відаў: L. stagnalis і L. ovata m. inflata. Сярод астатніх стацый склад дамінантных і другарадных відаў досыць align="left">рознастайны. Так, напрыклад, сярод чыгуначнага пруда дамінантнымі з'яўляюцца Sphaerium corneum, Sph. corneum m. westerlundi і Planorbis planorbis—віды другарадныя або нават выпадковыя для астатніх вадаёмаў. Для інстытуцкага пруда дамінантнымі з'яўляюцца Viviparus viviparus (для ручая Карны таксама) і Limnaea stagnalis—віды другарадныя для чыгуначнага пруда. Limnaea ovata m. optusa—у адзіночных экземплярах знойдзены сярод збораў, якія адносяцца да ручая Карны; Limnaea auricularia і Anodonta cygnea m. piscinalis—віды другарадныя, знойдзены ў чыгуначным пруду; Valvata pulchella—адзіночныя экземпляры, знойдзены таксама ў чыгуначным пруду. Не гледзячы на ўсё гэта, мы можам азначыць агульнасць відавога складу прэснаводных і мяккацелых разглядаемых стацый. Каэфіцыент агульнасці ўпер-

шыню быў прапанован швейцарскім батанікам Jaccard'ам пад назвай „фларыстычныя каэфіцыенты". Ужываўся ён пры параўнанні флоры розных месцажыхарстваў. Гэты каэфіцыент дае магчымасць судзіць аб тым, наколькі блізка або далёка адстаяць друг ад друга па фларыстычнаму складу даследуемыя ўчасткі адной або некалькіх асацыяцый. Пры вывучэнні экалогіі жывёл намі (Нефедаў, 1930) гэты каэфіцыент некалькі пераапрацован. Мы ўстанаўліваем 2 каэфіцыенты агульнасці: відавы (адпавядаючы „фларыстычнаму" Jaccard'a) і лічбовы. Абодва гэтыя каэфіцыенты, дапаўняючыя друг друга, знаходзяць дапасаванне ў спецыяльнай навуковай літаратуры (Нефедаў, 1931—1932, Байцова, 1931).

Відавы каэфіцыент агульнасці азначаецца па наступнай формуле: $Ksp. = \frac{c \cdot 100\%.}{a + b - c}$, дзе Ksp.—азначае відавы каэфіцыент агульнасці (у адрозненне ад лічбовага Кп), выражаемы ў процантах; a—лік відаў, знойдзены ў адной з параўноўваемых стацый; b—лік відаў, знойдзеных сярод другой стацыі; c—лік відаў, агульных для 1-й і 2-й стацый. Напрыклад, пры супастаўленні відавога складу прэснаводных мяккацелых чыгуначнага і інстытуцкага пруда маем наступныя даныя, узятыя з табліцы № 1:

Для чыгуначнага пруда $a = 15$
„ інстытуцк. „ $b = 15$ } Адсюль Ksp. =
Лік агульных відаў $c = 12$

$$= \frac{12 \cdot 100\%}{15 + 15 - 12} = \frac{1200}{18} = 67\%$$

Агульнасць відавога складу прэснаводных мяккацелых

Табліца № 2.

	Чыгун. пруд	Інстытуц. пруд	Тэатр. пруд	Ручэй Карна
Чыгуначны пруд	—	67%	13%	53%
Інстытуцкі „	—	—	13%	71%
Тэатральны „	—	—	—	14%
Ручэй Карна „	—	—	—	—

Такім чынам, найбольшая відавая агульнасць уласціва фауне мяккацелых чыгуначнага, інстытуцкага пруда і ручая Карна. Тэатральны пруд у гэтых адносінах ад усіх астатніх вадаёмаў стаіць адасоблена. Але розніца ў адносінах відавога складу першых трох вадаёмаў усё-ж мае месца і яны яшчэ ў большай ступені выявіліся, калі-б мы змаглі азначыць лічбовы каэфіцыент агульнасці. Тым не менш, з табліцы № 1 відаць, што кожная стацыя мае свой як якасны, так і колькасны склад прэснаводных мяккацелых.

Паўстае пытанне: ці не стаіць размеркаванне мяккацелых у сувязі са своеасаблівасцю хімічнага складу вады нашых вадаёмаў? У табліцы № 3 прыводзяцца даныя агульнага хімічнага аналіза (у mlgr на L.), якія характарызуюць ступень забруджанасці даследуемых стацый.

Табліца № 3.

	Чыгун. пруд	Інстытуц. пруд	Тэатр. пруд	Ручэй Карна
Агульная шчыльная астача . . .	280,0	287,0	666,0	293,3
Арганічнае вешчаство	116,0	151,0	328,0	92,0
Неарганічнае "	164,0	136,0	338,0	201,0
Узважаныя часціцы суспензіі . .	20,0	14,0	75,7	10,0
Вуглекіслы газ	71,3	—	115,8	58,0

Тэатральны пруд аказваецца ў найбольшай ступені забруджаным у параўнанні з іншымі вадаёмамі. На кожны літр вады прыходзіцца 328 mlgr арганічных вяшчэстваў, што перавышае даныя па астатніх стацыях у 2—3 разы. Максімальная забруджанасць тэатральнага пруда абумовіла яго поўную незаселенасць для прэснаводных мяккацелых. Нават віды з лёгачным дыханнем (L. stagnalis, L. ovata m. inflata) знойдзены тут у колькасці ўсяго некалькіх экземпляраў.

Чыгуначны пруд змяшчае арганічных вяшчэстваў 116 mlgr на 1 L. Яго меншая забруджанасць гніючымі арганічнымі вяшчэствамі ў параўнанні з інстытуцкім прудом можа быць і абумовіла заселенасць, галоўным чынам, жабрадыхаючымі мяккацелымі: Sphaerium corneum, Sph. corneum westerlundi (дамінантнымі), Viviparus viviparus і Anodonta cygnea m. piscinalis (другараднымі). Апошні від дапасован выключна да данага вадаёму. З мяккацелых з лёгачным дыханнем тут распаўсюджаны: Panorbis vortex (дамінантны), Limnaea stagnalis, L. ovata inflata, L. auricularia (другарадныя).

Рад заключэнняў аб размяшчэнні мяккацелых па вадаёмах у сувязі з іх забалочанасцю робіць В. П. Шванскі (1926).

1. Найбольш забалочаныя азёры маюць найбольшы процант відаў мяккацелых з масавым развіццём.

2. З павелічэннем забалочанасці возера павялічваецца лік відаў сям'і Limnaeidae і змяншаецца лік відаў з сям'і Unionidae.

Праўда, аўтар адзначае пры гэтым, што вывады маюць патрэбу ў значным удасканаленні і праверцы. Але яны не з'яўляюцца рашаючымі, а ў той жа час не пазбаўлены цікавасці, то я і рашаюся прывесці іх.

Па меры забалочанасці возера павялічваецца і ступень яго забруджанасці. Ва ўсякім выпадку, змест арганічных

вяшчэстваў гаразда вышэй, чым у чыстых азёрах. Нашы вадаёмы, інстытуцкі і чыгуначны пруды змяшчаюць досыць высокі процант арганічных вяшчэстваў у параўнанні з ручаём Карна. Па характару забруджанасці яны павінны стаяць вышэй любога возера, бо пруд з'яўляецца наступнай стадыяй у развіцці апошняга.

Выходзячы з нашых матэрыялаў, мы павінны былі зрабіць рад наступных заключэнняў:

1. Найбольшая забруджанасць тэатральнага пруда безумоўна не магла спрыяць засяленню яго прэснаводнымі мяккацелымі не толькі з жаберным, але і лёгачным дыханнем.

2. Астатнія вадаёмы хоць і адрозніваюцца друг ад друга зместам арганічных вяшчэстваў (колькасць якіх характарызуе ступень забруджанасці), тым не менш фауна прэснаводных мяккацелых у іх састаіць амаль з аднолькавага ліку відаў (14—15).

3. Відавы склад мяккацелых гэтых вадаёмаў састаіць, галоўным чынам, з відаў з лёгачным дыханнем:

Чыгун. пруд	—з лёгачн. дыхан.	9 відаў,	з жаберным	6.
Інстыт. „	„ „	10	„ „	5.
Рэчка Карна	„ „	10	„ „	4.

4. Тым не меней, найбольшая колькасць відаў з масавай прадукцыяй асобей прыпадае ўсё-ж на віды з жаберным дыханнем:

Чыгуначны пруд	—з лёг. дыхан. 1 дамін. від;	з жаберн. . . 2 дамін. від
Інстытуцкі	„ „ „ 1 „ „ 2 другарадн.	„ . . . 1 „ „ . . 3 другар.
Рэчка Карна	„ 3 другарадных	„ . . . 1 дамін. 2 другар

Відаць, ступень забруджанасці нашых вадаёмаў забяспечвае магчымасць масавага размнажэння і распаўсюджання, у першую чаргу, відаў з жаберным дыханнем і ў другую— відаў з лёгачным дыханнем. Ва ўсякім выпадку, гэты вывад супадае з другім заключэннем Шванскага.

Такім чынам, пытанне аб узаемаадносінах між арганізмам і акаляючым асяроддзем мы маем магчымасць даваць вучням не з кніг, не з фактаў далёкай фауны, а з акаляючай нас мясцовай прыроды. Падаваемы матэрыял па мяккацелых можа аказацца вельмі каштоўным і пры знаёмстве вучняў з рознымі сістэматычнымі адзінкамі і ў першую чаргу з паняццем віда. Рагавая катушка (Planorbis corneus) і звычайны прудавік (Limnaea stagnalis) прадстаўляюць сабой каштоўнейшы матэрыял, які дазваляе прадэманстраваць перад вучнямі адноснасць паняцця „віда“. Гэты матэрыял можна выкарыстаць і пры вывучэнні індывідуальнай зменчывасці ў адносінах цэлага рада прымет: вышыня і шырыня рака-

віны, вышыня скрутка і вусця і г. д. Падобнае вывучэнне дало магчымасць В. І. Жадзіну (1923) у межах Limnaea stagnalis устанавіць дзве формы (f. lata і f. elongata) і адну экалагічную морфу, якія вольна скрыжоўваюцца паміж сабой. Першыя дзве формы ён лічыць спадчыннымі. Болей познімі доследамі Шванскага (1927) было паказана, што па адзнаках адноснай даўжыні закрутка Limnaea stagnalis можна раздзяліць на два рады форм: адна з падоўжаным закруткам (elongata) дапасавана да вадаёмаў прудавога тыпу, другая (lata) з пакарочаным закруткам дапасавана да вадаёмаў азёрнага тыпу. Такім чынам гэтыя дзве формы ёсць толькі дзве экалагічныя морфы—азёрная і прудавая.

Пры вывучэнні індывідуальнай зменчывасці трэба карыстацца азначэннем рада біялагічных канстантаў: M—сярэдняга арыфметычнага, σ—квадратычнага адхілення-меры зменчывасці, r—каэфіцыента карэляцыі з іх сярэднімі памылкамі. Выкарыстанне-ж формулы рознасці сярэдніх ($M_1 - M_2 \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$) дае магчымасць азначыць, наколькі дасканала розніца ў сярэдніх (па той або іншай адзнацы), атрыманых па экалогіі рознародных матэрыялах. Гэту заўвагу прыводзім як метадычнае ўказанне.

ЛІТАРАТУРА:

1) В. П. Шванский—„К вопросу об изменчивости Limnaea stagnalis L, тр. Смолен. об-ва естествоиспыт. т. II, 1927 г.

2) Его-ж—К фауне пресноводных моллюсков Смоленск. губ., там же, т. I, 1926 г.

3) В. И. Жадин—„Изменчивость Limnaea stagnalis в водоемах окрестностей Мурома. Русск. гидробиол. журн., т. II, № 57, Саратов, 1925 г.

4) Н. Д. Владимирский—„Наши пресноводные моллюски", ГИЗ, 1927.

5) В. И. Жадин—„Наши пресноводные моллюски". Изд. Окской биостанции. Муром, 1926 г.

6) Н. И. Нефедов—„Муравьи Троицкого Л. С. заповедника и их распределение по элементам ландшафта".

7) Его-же—„Аб правядзенні экалагічнай экскурсіі па заалогіі і прыкладнай апрацоўцы матэрыялаў, сабраных пры гэтым". „Метадычны лісток" Гом. Дзярж. Пед. Ін-та. № 2, 1936 г.

Бачкароў Д. П.

Тэорыя лагарыфмаў у сярэдняй школе

Лагарыфмічная функцыя $y = \lg_a x$ адыгрывае істотную ролю ў школьным выкладанні матэматыкі. Аднак, у сярэдняй школе вельмі мала ўдзяляецца ўвагі гэтай элементарнай трансцэндэнтнай функцыі. Я хачу сказаць, што некаторыя істотныя пытанні, якія адносяцца да ўласцівасці гэтай функцыі, выкладчыкамі матэматыкі сярэдняй школы не закранаюцца зусім, а калі і закранаюцца, то досыць паверхоўна, так што вучні, пасля такога выкладання, часта застаюцца ў глыбокім недаўменні і няведанні. Такія адносіны выкладчыкаў матэматыкі сярэдніх школ да вывучэння паказанай функцыі, на мой погляд, тлумачацца адной (а часамі і ўсімі) з наступных прычын:

1. Выкладчык, ігнаруючы асноўныя прынцыпы навучання, замяняе іх грубым утылітарызмам.

2. Выкладчык, прыступаючы да выкладання лагарыфмічнай функцыі вучням, сам яшчэ не зусім яскрава ўяўляе сабе асноўныя яе ўласцівасці.

3. Выкладчык матэматыкі сярэдняй школы лічыць, што глыбокае вывучэнне лагарыфмічнай функцыі не з'яўляецца задачай сярэдняй школы, а што гэта ёсць задача вышэйшай школы. Выкладчык-жа вышэйшай школы, у сваю чаргу, лічыць, што займацца выкладаннем асноўных элементарных уласцівасцей лагарыфмічнай функцыі не яго справа, а справа выкладчыкаў сярэдняй школы. Такім чынам, гэта пытанне застаецца неразабраным у дастатковай ступені ні ў сярэдняй, ні ў вышэйшай школах. Значыць, па тэорыі лагарыфмаў атрымліваецца прабел у ланцугу сістэматычных ведаў вучняў сярэдняй школы. Такія пытанні, як вучэнне аб натуральных лагарыфмах, аб пераходзе ад натуральных лагарыфмаў да лагарыфмаў дзесятковых і наадварот, аб множнасці сістэм лагарыфмаў, аб многазначнасці лагарыфмаў застаюцца зусім неразгледжанымі ў сярэдніх школах, не гледзячы на тое, што у выкладчыкаў матэматыкі сярэдняй школы пры сучасных праграмных даных сярэдняй школы маецца зусім дастатковая матэматычная глеба для поўнага вырашэння паказаных пытанняў у сярэдняй школе.

З пункту погляду прынцыпаў совецкай школы трэба самым рэзкім чынам асудзіць усе тры паказаныя мною пры-

чыны, якія выклікаюць недастатковую ўвагу выкладчыкаў матэматыкі да выкладання лагарыфмічнай функцыі ў сярэдняй школе. Асноўныя прынцыпы савецкай школы патрабуюць выканання пры выкладанні прадмета прынцыпа адзінства тэорыі і практыкі. У выкладанні раздзела аб лагарыфмах у сярэдняй школе зараз існуе разрыў між тэорыяй і практыкай, а іменна: пры праходжанні лагарыфмаў выкладчыкі звяртаюць галоўную ўвагу на практыку, а тэарэтычную частку раздзела скарачаюць да такой ступені, што ў цэлым пры праходжанні раздзела аб лагарыфмах выкладанне атрымлівае характар грубога ўтылітарызма. У вялікай колькасці выкладчыкаў матэматыкі сярэдняй школы існуе зусім няправільная думка аб тым, што лагарыфмы патрэбны выключна для вытварэння складаных вылічэнняў. Гэта няправільна. Лагарыфмы патрэбны не толькі як вылічальны апарат. Лагарыфмічная функцыя адыгрывае вельмі важную ролю ў вышэйшай матэматыцы і яе шматлікіх прымяненнях. А таму, побач з практычнымі пытаннямі пры вывучэнні лагарыфмаў неабходзен глыбокі разгляд і тэарэтычных пытанняў, звязаных з уласцівасцямі гэтай функцыі.

Мая мэта заключаецца ў тым, каб у гэтай працы выкласці пытанні выкладання лагарыфмаў у форме даступнай для вучняў сярэдняй школы і разам з гэтым дастаткова строга з тэарэтычна-матэматычнага пункту погляду; даная праца мае мэтай ліквідаваць разрыў між тэорыяй і практыкай, які яшчэ дзе-ні-дзе існуе зараз у выкладанні раздзела аб лагарыфмах у сярэдняй школе.

У гэтай працы я ўказваю, па-першае, план-праграму пабудовы выкладання раздзела аб лагарыфмах у сярэдняй школе, па-другое, даю методыку праходжання гэтага раздзела элементарнай алгебры і, па-трэцяе, што само сабою зразумела, даю некаторыя дадатковыя тэарэтычныя пытанні для падвышэння кваліфікацыі выкладчыка матэматыкі сярэдняй школы, без авалодання якімі выкладчык не зможа падаць матэрыял вучням з належнай тэарэтычнай строгасцю і паўнатой.

У цэлым праца мае галоўнай сваёй мэтай павялічыць удзельную вагу тэарэтычнай часткі раздзела аб лагарыфмах і паставіць яе на належную вышыню ў сярэдняй школе, згодна асноўных патрабаванняў нашай школы да выкладання. Таму праца і называецца—„Тэорыя лагарыфмаў у сярэдняй школе“.

Я раю ў сярэдняй школе выкладанне лагарыфмаў падзяліць на два этапы, першы з якіх павінен быць адзначан да IX класа і ўключаць у сябе выкладанне вучэння аб лагарыфмах, заснаванае на алгебраічным аналізе; другі этап павінен быць адзначан да X класа і ўключаць у сябе выкладанне вучэння аб лагарыфмах, заснаванае на аналізе

прэдзельных пераходаў, г. зн. на аналізе бесканечна малых. Само сабою зразумела, што другі этап вывучэння лагарыфмаў павінен з'яўляцца арганічным працягам 1-га этапа, які дапаўняе і паглыбляе яго. Гэта дзяленне вывучэння лагарыфмаў у сярэдняй школе на 2 этапы выклікаецца рознымі па прынцыпу азначэннямі лагарыфма, а гэтыя розныя азначэнні лагарыфма, для іх разумення, патрабуюць і рознай падрыхтоўкі вучняў.

Перш чым прыступіць да вывучэння раздзела аб лагарыфмах, вучні павінны быць добра азнаёмлены з прамавугольнай сістэмай дэкартавых каардынат на плошчы, з вычэрчваннем у гэтых каардынатах графікаў прасцейшых функцый, асабліва паказальнай; далей вучні павінны быць добра азнаёмлены з абагуленым разуменнем аб паказальніку ступені, з пытаннем здабывання кораня n-ай ступені з ліку. І толькі пасля таго, як паказаныя мною пытанні будуць прапрацаваны вучнямі зусім дастаткова і не пакінуць у іх недаўменняў, можна пераходзіць да вывучэння лагарыфмаў. Пры гэтым трэба вучням давесці да ведама аб тым, што лагарыфмам можна даць не адзінае азначэнне; аднак, усякае азначэнне лагарыфмаў можа задавальняць асноўнай уласцівасці лагарыфмаў, па якой здабытак лікаў замяняецца сумай іх лагарыфмаў.

Пасля зробленага мной кароткага ўступу да пытання вучэння аб лагарыфмах, я пераходжу да непасрэднага ажыццяўлення пастаўленай мэты, г. зн. да разгляду ўказаных вышэй двух этапаў вывучэння лагарыфмаў.

1-ы этап.

Перш, чым перайсці да азначэння і выкладання ўласцівасцей лагарыфмаў, я коратка спынюся на самой ідэі лагарыфмаў. Для гэтай мэты складзем наступную табліцу:

$2^0 = 1$	$2^{15} = 32768$
$2^1 = 2$	$2^{16} = 65536$
$2^2 = 4$	$2^{17} = 131072$
$2^3 = 8$	$2^{18} = 262144$
$2^4 = 16$	$2^{19} = 524288$
$2^5 = 32$	$2^{20} = 1048576$
$2^6 = 64$	$2^{21} = 2097152$
$2^7 = 128$	$2^{22} = 4194304$
$2^8 = 256$	$2^{23} = 8383608$
$2^9 = 512$	$2^{24} = 16777216$
$2^{10} = 1024$	$2^{25} = 33554432$
$2^{11} = 2048$	$2^{26} = 67108864$
$2^{12} = 4096$	$2^{27} = 134217728$
$2^{13} = 8192$	. . . .
$2^{14} = 16384$	. . . .

Дапусцім зараз, што нам патрабуецца перамножыць два лікі $16 \cdot 128$, узятыя з гэтай табліцы. У даным выпадку множанне ўтвараем у наступным парадку:

Па табліцы знаходзім: $16 = 2^4$

$$128 = 2^7$$

Такім чынам тут, дзякуючы загадзя складзенай табліцы, нам удалося выразіць два розных лікі 16 і 128, праз адну і тую-ж падставу ў розных ступенях.

Вядома, што $16 \cdot 128 = 2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$.

Але па табліцы знаходзім, што $2^{11} = 2048$.

Значыць мы можам напісаць: $16 \cdot 128 = 2048$.

Такім чынам, мы атрымалі вынік, не прыбягаючы да множання саміх лікаў, а замяніўшы гэта множанне складаннем паказальнікаў ступені пры аснаванні 2.

Яшчэ прыклад: $4096 \cdot 32768 = ?$

$$4096 = 2^{12}$$
$$32768 = 2^{15}$$

Значыць, маем:

$$4096 \cdot 32768 = 2^{12} \cdot 2^{15} = 2^{27} = 134217728$$

Патрабуецца раздзяліць 262144 на 64?

Па табліцы знаходзім:

$$262144 = 2^{18}$$
$$64 = 2^6$$

Значыць, мы можам напісаць, што

$$262144 : 64 = 2^{18} : 2^6 = 2^{18-6} = 2^{12},$$

але ў табліцы знаходзім:

$$2^{12} = 4096,$$

значыць:

$$262144 : 64 = 4096.$$

Тут дзяленне лікаў заменена адыманнем паказальнікаў іх ступеней, пры аснаванні 2.

Патрабуецца ўзвесці ў ступень: $(256)^3 = ?$

Па табліцы: $256 = 2^8$.

Значыць, можна напісаць:

$$(256)^3 = (2^8)^3 = 2^{24}$$

У табліцы знаходзім:

$$2^{24} = 16777216.$$

Значыць:

$$(256)^3 = 16777216.$$

Тут узвядзенне ў ступень заменена множаннем.

Патрабуецца здабыць корань: $\sqrt[4]{256} = ?$

Па табліцы знаходзім:

$$256 = 2^8$$

Значыць можна напісаць:

$\sqrt[4]{256} = (256)^{\frac{1}{4}} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4.$

У даным выпадку здабыванне кораня заменена дзяленнем. На прыведзеных прыкладах мы бачылі, што множанне можна замяняць складаннем; дзяленне можна замяняць адыманнем, узвядзенне ў ступень можна замяняць множаннем і, урэшце, здабыванне кораня можна замяніць дзяленнем, з дапамогай згадзя падрыхтаванай табліцы.

Аднак, у пададзенай вышэй табліцы маецца цэлы рад пропускаў. У гэтай табліцы няма ступеняў для лікаў

3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ... , 31,
33, 34, 35, 36 . . . . , 63,
65, ... 127,
. . . .
. . . .

Так, напрыклад, ступень ліка 3 пры ўзятым намі аснаванні 2 будзе заключацца між 1 і 2 таму, што $2^1 = 2$; $2^2 = 4$, значыць $3 = 2^{1+\text{дроб}}$

Ступені лікаў 5, 6, 7 будуць заключацца між 2 і 3, бо $2^2 = 4 < 5$; 6; 7, а $2^3 = 8 > 5$; 6; 7, г. зн. ступені лікаў 5, 6, 7 пры ўзятым намі аснаванні 2 будуць роўны 2 з нейкім дробам і г. д. і г. д.

Пэўнымі метадамі, з якімі мы пазнаёмімся ніжэй, можна вылічыць паказальнікі ступеней любога ліку N пры любым аснаванні *a*. Такім чынам, усякі лік можа быць выражан праз аснаванне ў некаторай ступені, г. зн. для любога ліку X можна напісаць роўнасць $X = a^y$.

Дапусцім цяпер, што мы маем табліцы, у якіх даны загадзя вылічаныя ступені ўсіх дадатных лікаў пры адным і тым жа выбраным намі аснаванні *a*. Дапусцім цяпер, што нам патрабуецца памножыць два дадатных лікі: N_1 і N_2. Замест таго, каб непасрэдна множыць гэтыя лікі, мы робім так: у табліцы, якая маецца ў нас, знаходзім, што

$$N_1 = a^{y_1};$$
$$N_2 = a^{y_2},$$

значыць мы можам напісаць:

$$N_1 \cdot N_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2} = a^{y_3}.$$

Адваротна знаходзім па табліцы лік апаведны a^{y_3}, г. зн. па табліцы знаходзім $a^{y_3} = N_3$, значыць: $N_1 \cdot N_2 = N_3$.

Такім чынам мы атрымалі вынік, не прыбягаючы да множання саміх лікаў $N_1 \cdot N_2$, а замяніўшы гэта множанне складаннем паказальнікаў y_1 і y_2 ступеней гэтых лікаў пры аснаванні *a*.

Такім чынам, з дапамогай памянёнай табліцы можна было-б здабытак лікаў, дзяленне лікаў, узвядзенне лікаў у ступень і здабыванне кораня з ліку замяніць суадпаведна складаннем, адыманнем, множаннем і дзяленнем суадпаведных паказальнікаў ступеней гэтых лікаў пры аснаванні a.

Табліцы, у якіх даны вылічаныя загадзя ступені лікаў пры адным і тым-жа выбраным аснаванні, называюцца табліцамі лагарыфмаў.

Азначэнне лагарыфма.

Пры вывучэнні лагарыфмаў у IX класе трэба выходзіць з азначэння:

Лагарыфмам данага ліку x пры даным аснаванні a называецца паказальнік ступені y, у якую неабходна ўзвесці гэта аснаванне, каб атрымаць лік x.

Матэматычна прыведзенае азначэнне запішацца так: $y = \lg_a x$, або $x = a^y$.

Гэтыя два запісы роўназначныя між сабою на падставе данага азначэння лагарыфму, а таму ў далейшых разважаннях, гледзячы па акалічнасцях, мы будзем ужываць тую або іншую з паказаных формул.

З данага намі азначэння лагарыфма відаць, што задача адшукання лагарыфма данага ліку па данаму аснаванню ёсць задача адваротная ўзвышэнню ў ступень. На самай справе, няхай нам патрабуецца даведацца, які павінен быць паказальнік y ступені, у якую неабходна ўзвесці аснаванне 2, каб атрымаць 8; 4; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$. Абазначыўшы шукаемыя паказальнікі адпаведна праз x_1, x_2, x_3 і x_4, мы, для рашэння пастаўленай задачы, можам скласці раўнанні:

$$2^{x_1} = 8;\ 2^{x_3} = \tfrac{1}{4};$$
$$2^{x_2} = 4;\ 2^{x_4} = \tfrac{1}{8};$$

з якіх. находзім: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; $x_4 = -3$,
значыць: $\lg_2 8 = 3$; $\lg_2 4 = 2$; $\lg_2 \frac{1}{4} = -2$; $\lg_2 \frac{1}{8} = -3$,

Дзеянне, праз якое знаходзіцца паказальнік ступені па данай ступені і данаму аснаванню, называецца знаходжаннем лагарыфма данага ліку па данаму аснаванню.

Лёгка заўважыць, што пры даным намі азначэнні лагарыфма ўзнікае рад затрудненняў істотнага характару, міма якіх выкладчыкі матэматыкі сярэдніх школ у вялікай колькасці выпадкаў праходзяць моўчкі, не тлумачачы іх вучням як належыць.

Першая цяжкасць, з якой мы сустракаемся пры вывучэнні лагарыфмаў, заключаецца ў тым, што ў кожнай сістэме лагарыфмаў за аснаванне a заўсёды бярэцца лік дадатны. У вучняў па гэтай прычыне адразу паўстаюць пытанні:

1) Чаму аснаванне a мы заўсёды павінны лічыць дадатным?

2) А што будзе, калі мы прымем за аснаванне a адмоўны лік?

На пастаўленыя пытанні ў вялікай колькасці выпадкаў вучні атрымліваюць наступны адказ: „За аснаванне a мы павінны браць лік дадатны, а пры адмоўным аснаванні лікі лагарыфмаў не маюць".

Такі адказ не можа лічыцца здавальняючым, а тым болей вычарпальным. Пасля такога адказу вучні застаюцца ў глыбокім нездавальненні і недаўменні. Гэта нездавальненне і недаўменне паглыбляецца яшчэ і тым, што ў школьнай навучальнай літаратуры гэта пытанне падрабязна таксама не разглядваецца.

Чаму-ж аснаванне a ў роўнасцях

$$y = \lg_a x,$$

або

$$x = a^y$$

мяркуецца заўсёды дадатным?

Для таго, каб адказаць на пастаўленае пытанне, мы разгледзім роўнасць

$$x = a^y \ldots \quad (1)$$

разбярэм два выпадкі:

1) Няхай у роўнасці (I) y ёсць лік цэлы. У гэтым выіпадку, пры адмоўным аснаванні a пераменная x прыймала-б для цэлых значэнняў y то дадатныя, то адмоўныя значэнні, а імення: цотным значэнням y адпавядалі-б дадатныя значэнні пераменнай x, а няцотным значэнням y адпавядалі-б адмоўныя значэнні пераменнай x.

2) Няхай у роўнасці (I) y прымае ўсе магчымыя дробныя рацыянальныя значэнні, г. зн. няхай $y = \frac{m}{n}$, дзе m і n — цэлыя ўзаемна-простыя лікі. Лёгка заўважыць, што пры дробных рацыянальных значэннях y пераменная x прыймала-б многа разоў побач з сапраўднымі значэннямі і мнімыя значэнні, якія адпавядаюць няцотным m і цотным n, г. зн. пры няцотным m і цотным n пераменная x не існавала-б у галіне сапраўдных лікаў.

З усяго сказанага відаць, што пры адмоўным аснаванні a ў роўнасці (I) сукупнасць пар значэнняў (x,y) не магла-б утварыць непарарыўнай крывой. І таму, каб крывая $x = a^y$ магла быць непарарыўнай, мы ў роўнасці

$$x = a^y,$$

або

$$y = \lg_a x$$

перш за ўсё павінны аснаванне a лічыць лікам дадатным. У гэтым выпадку сукупнасць пунктаў, якія адказваюць

сукупнасці пар значэнняў (x, y), звязаных роўнасцю $x = a^y$, можна будзе злучыць непарыўнаю крывой. Аднак, і пры $a > 0$ усё-ж немагчыма абыйсціся без новага абмежавання, якое на першы погляд здаецца выпадковым. Гэта абмежаванне паўстае з пытання аб дадатных значэннях пераменнай x у роўнасці (I). Справа ў тым, што функцыя x, азначаная роўнасцю $x = a^y$, пры дадатным аснаванні a можа быць неперарыўнай і адназначнай ўтым і толькі ў тым выпадку, калі для кожнага значэння y мы будзем прыймаць пад увагу толькі і толькі дадатныя значэнні пераменай x. У супраціўным выпадку аб адназначнасці гэтай функцыі гутаркі быць не можа. Пры вывучэнні данага пытання ў сярэдняй школе звычайна кажуць: „Адмоўныя лікі пры дадатным аснаванні лагарыфмаў не маюць“. У гэтым выпадку правільней было-б казаць так: „адмоўныя лікі пры дадатным аснаванні ў вобласці сапраўдных лікаў лагарыфмаў не маюць“. Пазней мы высветлім, што і адмоўныя лікі маюць лагарыфмы пры дадатным аснаванні, але гэтыя лагарыфмы комплексныя лікі.

Сутнасць закранутага пытання заключаецца ў наступным: у роўнасці

$$x = a^y$$

пры дробным рацыянальным значэнні

$$y = \frac{m}{n},$$

дзе m і n узаемна-простыя лікі, як вядома, x азначыцца па формуле:

$$x = \sqrt[n]{a^m} \dots \quad (2)$$

У сілу таго, што мы a лічым дадатным лікам, можна напісаць, што

$$a^m = \alpha > 0$$

Тады роўнасць (2) можна перапісаць так:

$$x = \sqrt[n]{\alpha}$$

але нам вядома, што корань n-й ступені з дадатнага ліку α мае n розных між сабою значэнняў, якія можна адшукаць па формуле:

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Значыць, у роўнасці (2), x мае n розных між сабою значэнняў, якія адпавядаюць адзінаму значэнню $y = \frac{m}{n}$.

Напрыклад, пры $y = \frac{1}{4}$ і пры $a = 16$, мы для x з роўнасці (2) атрымліваем наступныя чатыры значэнні:

$$x_1 = 2; \; x_2 = -2; \; x_3 = 2i; \; x_4 = -2i.$$

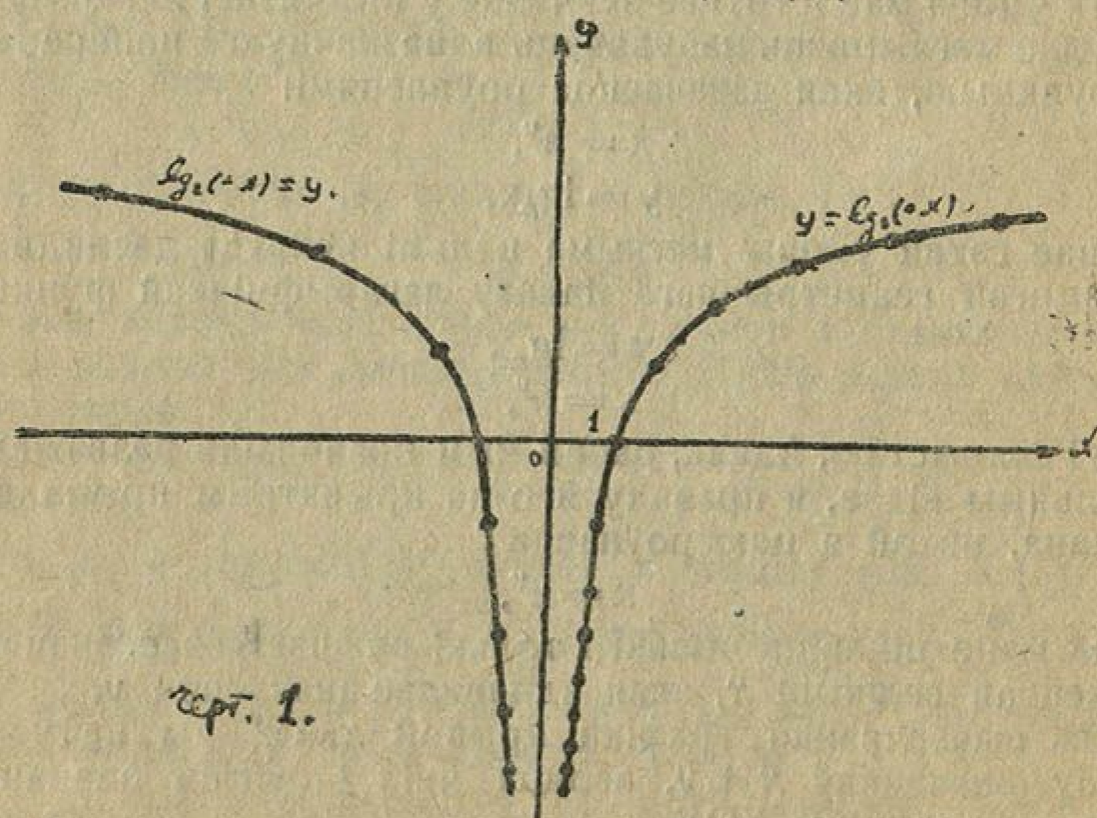
На самай справе
$$x=\sqrt[4]{16},$$
або $x=\sqrt[4]{16}=2\left[\cos\frac{2k\pi}{4}+i\ \sin\frac{2k\pi}{4}\right]$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Даючы ў апошняй роўнасці індэксу k паказаныя значэнні, мы і атрымаем чатыры розных значэнні x, якія будуць адпавядаць аднаму значэнню y у роўнасці $x=a^y$, дзе
$$a=16,$$
$$y=\tfrac{1}{4}.$$
Такім чынам, мы паказалі, што ў роўнасці
$$x=a^y$$
пры $a>0$ для кожнага дробнага рацыянальнага значэння $y=\frac{m}{n}$ мы атрымліваем n розных між сабой значэнняў пераменнай x, азначаемыя роўнасцю
$$x=\sqrt[n]{a^m}.... \qquad (3)$$
Калі-ж мы абмяжуемся толькі і толькі вяшчэственымі лікамі, то і ў гэтым выпадку пры цотным n мы атрымліваем два значэнні x, якія адпавядаюць аднаму дробнаму рацыянальнаму значэнню y у роўнасці (2); адно з гэтых значэнняў x будзе дадатным, а другое—адмоўным. Такім чынам, каб пазбегнуць паказанай многазначнасці функцыі $x=a^y$ пры дробных рацыянальных значэннях аргумента y, мы і павінны прыйсці да згоды, якая і састаіць у тым, што мы пад x заўсёды будзем разумець дадатнае значэнне кораня ў роўнасці (3) або, так званае, галоўнае яго значэнне.

Гэта ўмова мае істотнае значэнне ў вывучэнні лагарыфма, бо яна дае магчымасць пабудаваць адназначную і неперарыўную функцыю, якая азначаецца роўнасцямі:
$$x=a^y,$$
або
$$y=\lg_a x.$$
Значэнне гэтай умовы магчыма вельмі яскрава даследваць з дапамогай геаметрычнага паказу лагарыфмічнай функцыі
$$y=\lg_a x$$
або
$$x=a^y,$$
якія я і скарыстаю. Аднак, раней чым праводзіць разважанне ў агульным відзе, я правяду яго на прыватным прыкладзе. А іменна, няхай я маю роўнасць
$$x=2^y,$$
у якой мяне цікавіць толькі і толькі вяшчэственае значэнне пераменнай велічыні x, якая адпавядае значэнням y.

Для вычэрчвання графіка крывой $x=2^y$ мы пабудуем табліцу значэнняў x і y, згодна якіх і будзем адзначаць пункты на роўніцы XOY.

y	x
$-\infty$	0
$-\frac{9}{2}$	$\pm\frac{1}{16\sqrt{2}}$
-4	$\frac{1}{16}$
$-\frac{7}{2}$	$\pm\frac{1}{8\sqrt{2}}$
-3	$\frac{1}{8}$
$-\frac{5}{2}$	$\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}$
-2	$\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{2}$	$\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$
-1	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\pm\sqrt{2}$
1	2
$\frac{3}{2}$	$\pm 2\sqrt{2}$
2	4
$\frac{5}{2}$	$\pm 4\sqrt{2}$
3	8
$\frac{7}{2}$	$\pm 8\sqrt{2}$
4	16
$\frac{9}{2}$	$\pm 16\sqrt{2}$
$+\infty$	$+\infty$



черт. 1.

З пададзенага чарцяжа і табліцы відаць, што кожнаму значэнню y адпавядае адно і толькі адно значэнне x, калі мы цікавімся толькі і толькі дадатнымі яго значэннямі. Калі-б мы паралельна з дадатнымі значэннямі x сталі цікавіцца пры складанні табліцы і адмоўнымі значэннямі x, то мы на падставе атрыманай такім чынам табліцы значэнняў x і y пабудавалі-б дзве крывых, з якіх крывая $y = \lg_2(+x)$ мела-б пунктаў гаразда болей, чым крывая $y = \lg_2(-x)$, хаця на той і другой крывой пунктаў безліч.

Заўважым, што пры складанні табліцы для пабудовы графіка крывой $x = 2^y$, мы паказальніку y давалі значэнні, якія адрозніваюцца друг ад друга на $\frac{1}{2}$, г. зн. у тым выпадку велічыня y, змяняючыся, прабягала не ўсе магчымыя рацыянальныя значэнні, а таму велічыня x, звязаная з y раўнаннямі $x = a^y$, атрымлівала таксама не ўсе магчымыя для яе дадатныя значэнні, адпавядаючыя магчымым рацыянальным значэнням y. Але цяпер відаць, што, калі ў роўнасці

$$x = 2^y$$

велічыня y прабягае ўсе магчымыя для яе рацыянальныя значэнні, г. зн. усюды шчыльная множнасць рацыянальных лікаў, то атрыманым пры гэтым дадатным значэннем абсцысы $x = 2^y$ адпавядае на нашай крывой $y = \lg_2(+x)$ усюды шчыльная множнасць пунктаў (x, y). Калі-б мы адначасова з дадатнымі значэннямі x сталі азначаць у роўнасці $x = \sqrt[n]{2^m}$ пры цотным n кожны раз і адпаведныя адмоўныя значэнні абсцысы x, то атрымалася-б для гэтых адмоўных значэнняў x, можна сказаць, „удвая меней шчыльная“ (Клейн, ч. I), але ўсё-ж усюды шчыльная множнасць пунктаў (x, y) на крывой $y = \lg_2(-x)$, якая з'яўляецца люстраным паказам нашай крывой $y = \lg_2(+x)$ адносна восі У-ов.

Праведзеныя намі разважанні для раўнання

$$x = 2^y$$

мы лёгка можам абагуліць і для любога раўнання

$$x = a^y,$$

дзе $a > 0$. На самай справе, для розных дадатных значэнняў аснавання a мы з гэтага раўнання агульнага віду атрымліваем раўнанне крывых аднаго і таго-ж класа; г. значыць раўнанне $x = a^y$, дзе $a > 0$ ёсць раўнанне адной сям'і плоскіх крывых, іменна сям'і лагарыфмічных крывых $y = \lg_a x$ з праізвольным параметрам $a > 0$, змяняючы які неперарыўна мы атрымаем безліч непарарыўных крывых гэтай-жа сям'і, якія пакрываюць усю правую палову роўніцы адносна восі У-ов. Сярод гэтай сям'і крывых канечна знаходзіцца і крывая

$$x = 2^y$$

або

$$y = \lg_2 x,$$

адпавядаючая значэнню параметра $a = 2$.

Відаць, усе крывыя, заданыя раўнанням

$$x = a^y$$

або $$y = \lg_a x$$

маюць адзін і толькі адзін агульны пункт (1,0), у якім яны перасякаюцца.

Заўважым, што праведзеныя намі разважанні адносна раўнання

$$x = a^y$$

або $$y = \lg_a x$$

мелі на ўвазе толькі і толькі рацыянальныя значэнні y. Відаць, множнасць пунктаў, адпавядаючых пры гэтым парам значэнняў (x, y), дзе $x > 0$, нельга злучаць у адну неперарыўную правільна ідучую крывую ў правай палове роўніцы адносна восі $У$-ов. Калі-ж у раўнанні

$$x = a^y$$

або $$y = \lg_a x,$$

дзе $$a > 0 \text{ і } x > 0,$$

даваць пераменнай y усемагчымыя вяшчэственыя, г. зн. рацыянальныя і ірацыянальныя значэнні, адпаведна чаму x таксама будзе прымаць усемагчымыя вяшчэственыя значэнні, то ў гэтым выпадку пункты ў правай поўроўніцы адносна восі $У$-ов, адпавядаючыя парам значэнняў (x, y), можна злучыць у адну неперарыўную правільна ідучую крывую, гэта крывая і будзе з'яўляцца геаметрычным адлюстраваннем функцыі

$$y = \lg_a x$$

або $$x = a^y,$$

аднак, наша сцвярджэнне ў даным выпадку заснавана толькі на інтуіцыі, а значыць яно не можа лічыцца строга даказаным. Я хачу сказаць, што ўяўляецца далёка няясным, чаму ў даным выпадку, калі даваць у раўнанні $x = a^y$ усемагчымыя вяшчэственыя, г. зн. рацыянальныя і ірацыянальныя значэнні і, беручы пад ўвагу пры гэтым толькі і толькі дадатныя значэнні x, можна іменна множнасць пунктаў, адпавядаючых парам значэнняў (x, y) у правай поўроўніцы адносна восі $У$-ов, злучыць у адну неперарыўную правільна ідучую крывую, г. зн. намі строга не даказана, што функцыя

$$y = \lg_a x, \text{ дзе } a > 0 \text{ і } x > 0$$

ёсць функцыя неперарыўная на інтэрвале $0 < x < +\infty$, хаця гэта палажэнне інтуітыўным шляхам было ўжо намі ўстаноўлена. Усё гэта зразумець і даказаць магчыма толькі з дапамогай болей глыбокіх сродкаў тэорыі функцый, якімі не можа распалагаць сярэдняя школа. Таму ў сярэдняй школе гэта палажэнне неабходна прымаць без доказу, грун-

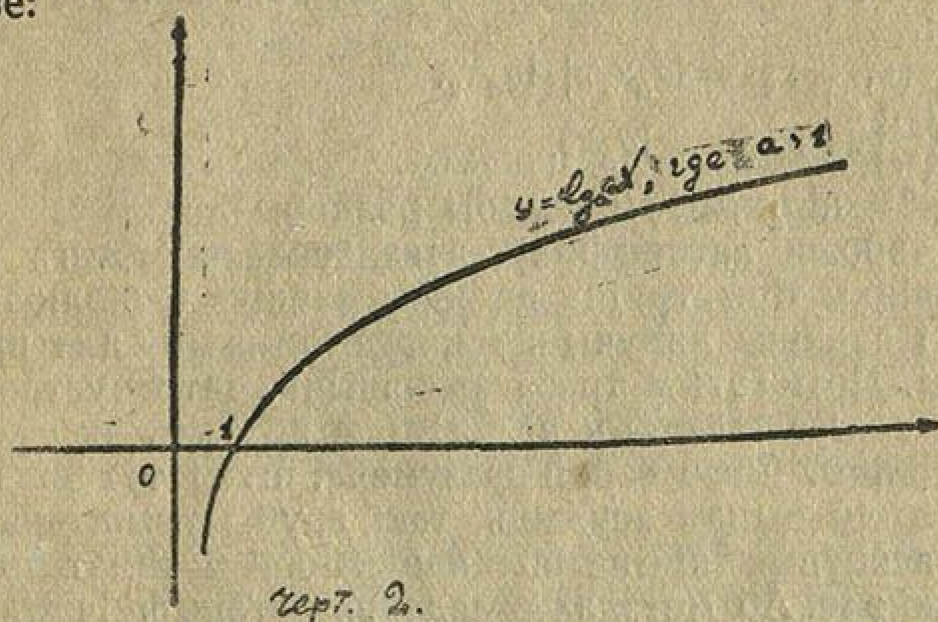
туючыся на геаметрычнай інтуіцыі. Але аб гэтым таксама неабходна прама і ясна заявіць вучням, а не даваць ім па гэтым пытанні неадпавядаючых рэчаіснасці адказаў.

Графік лагарыфмічнай функцыі.

Пры вычэрчванні графіка лагарыфмічнай функцыі карысна асобна разглядзець два выпадкі:

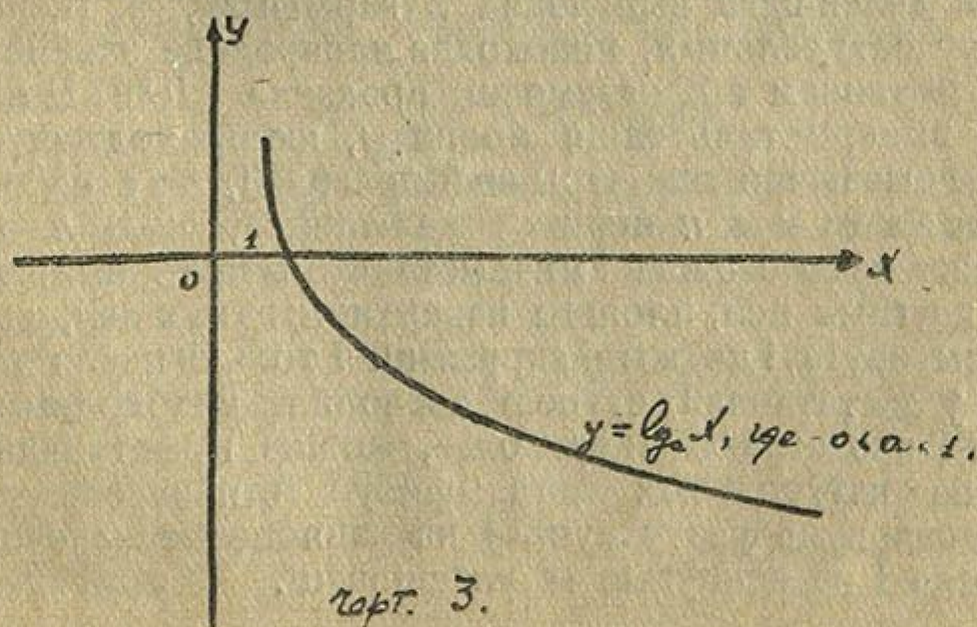
1) $y = \lg_a x$, дзе $a > 1$
і
2) $y = \lg_a x$, дзе $0 < a < 1$.

Графік функцыі $y = \lg_a x$, дзе $a > 1$, выявіцца ў наступным выглядзе:



Черт. 2.

У гэтым выпадку функцыя $y = \lg_a x$ будзе ўсюды ўзрастаючай, г. зн. у гэтым выпадку, калі x, змяняючыся, будзе ўзрастаць ад нуля і да $+\infty$, функцыя y таксама будзе ўзрастаць ад $-\infty$ да $+\infty$. У прыватнасці: пры $x = 0$, $y = -\infty$; пры $x = 1$, $y = 0$; пры $x = +\infty$. $У = +\infty$. Графік-жа функцыі $y = \lg_a x$, дзе $0 < a < 1$, прадставіцца ў такім выглядзе:



Черт. 3.

У гэтым выпадку функцыя $y = \lg_a x$ будзе ўсюды ўбываючай, г. значыць у гэтым выпадку, калі x, змяняючыся, будзе ўзрастаць ад нуля і да $+\infty$, функцыя y у гэты час будзе ўбываць ад $+\infty$ да $-\infty$. У прыватнасці: пры $x = 0$, $y = +\infty$; пры $x = 1$, $y = 0$; пры $x = +\infty$, $y = -\infty$. Для вычэрпвання графікаў функцыі $y = \lg_a x$ карысна браць раўнанне $x = a^y$, якое, як мы азначалі вышэй, роўназначна раўнанню $y = \lg_a x$.

Далей трэба заўважыць, што выпадак $0 < a < 1$ мала цікавы, бо ў практыцы ў цяперашні час не ўжываецца.

На гэтым канчаем агульную частку выкладання тэорыі лагарыфмічнай функцыі. Пасля гэтай агульнай і самай галоўнай часткі выкладання тэорыі лагарыфмічнай функцыі неабходна даказаць асноўныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі:

1) $\lg_a (x_1 \cdot x_2) = \lg_a x_1 + \lg_a x_2$.

2) $\lg_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \lg_a x_1 - \lg_a x_2$.

3) $\lg_a x^n = n \lg_a x$, дзе n—любы рэальны лік.

Калі тэорыя лагарыфмаў даведзена да гэтага пункта, вучні павінны прыступіць да азнаямлення з табліцамі лагарыфмаў і павінны навучыцца карыстацца імі для практычнай мэты. Пры гэтым трэба адзначыць, што сустракаюцца выпадкі, калі выкладчык не ўпамінае аб тым, як складзены гэтыя табліцы. Само сабой зразумела, што і тут мы павінны самым рэзкім чынам асудзіць такі грубы утылітарызм, які ігнаруе асноўныя прынцыпы навучання матэматыцы ў сярэдняй школе. Аб метадах складання лагарыфмічных табліц трэба чотка і яскрава сказаць вучням, з гэтай мэтай трэба разглядзець з вучнямі вучэнне аб натуральных лагарыфмах і аб раскладанні іх у рады. Гэтае пытанне, на мой погляд, трэба аднесці да праграмы X класа, г. зн. да другога этапа вывучэння лагарыфмаў.

2-і этап.

Для далейшага вывучэння лагарыфмаў, а іменна лагарыфмаў натуральных, неабходна папярэдняе знаёмства вучняў з пытаннем аб разуменні прэдзела. Для гэтай мэты добра выкарыстаць такія моманты, як праходжанне бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі, дзе сума ёсць прэдзел сумы n першых яе членаў, калі $n \to \infty$. Для гэтай-жа мэты можна выкарыстаць пытанні вылічэння аб'ёмаў круглых цел, плошчы паверхней гэтых цел, вылічэнне плошчы круга і даўжыні акружыні. І толькі пасля таго, калі вучні ў дастатковай ступені авалодалі неабходнымі звесткамі аб прэдзельным пераходзе, можна прыступаць да вывучэння натуральных лагарыфмаў. Адначасова з гэтым трэба звярнуць увагу вучняў на паняцце бесканечна малых велічынь і на асноўныя іх уласцівасці.

Гістарычныя заўвагі аб развіцці вучэння аб лагарыфмах.

Калі мы жадаем дасягнуць сапраўды поўнага разумення тэорыі лагарыфма, то будзе лепш за ўсё прасачыць у агульных рысах гісторыю развіцця гэтай тэорыі. Як і ўсякае паняцце, паняцце лагарыфма ўзнікла не адразу. Паняцце лагарыфма ўзнікла з параўнання 2 прагрэсій: арыфметычнай і геаметрычнай. А іменна няхай мы маем табліцу ступеней з аснаваннем 2:

$2^0=1$	$2^6=64$
$2^1=2$	$2^7=128$
$2^2=4$	$2^8=256$
$2^3=8$	$2^9=512$
$2^4=16$	$2^{10}=1024$
$2^5=32$	. . . . .
	. . . . .

Разглядаючы гэту табліцу, мы заўважаем узрастанне лікаў з аднаго боку ў арыфметычнай прагрэсіі

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,...

гэта—паказальнікі ступеней пры аснаванні 2; з другога боку ўзрастанне лікаў гэтай-жа табліцы ў геаметрычнай прагрэсіі:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,...

гэта—вынікі, атрыманыя ад узвядзення ў адпаведную ступень ліку 2.

Гэта акалічнасць была вядома яшчэ Архімеду, распрацаваная пасля нямецкім матэматыкам Міхаэлам Штыфелем. У 1554 г., г. зн. у самым пачатку развіцця сучаснай алгебры, Міхаэль Штыфель выпусціў у Нюрэнберге сваю „Arithmetica integra“, у якой упершыню можна сустрэць дзеянне над ступенямі з любымі рацыянальнымі паказальнікамі, прычым асабліва падкрэсліваецца правіла множання.

У гэтай кнізе Штыфель дае, нават бадай першую, табліцу лагарыфмаў, але канечна вельмі рудументарную. Гэта табліца змяшчае ўсяго толькі цэлыя лікі ад—3 да 6 у якасці паказальнікаў і побач з імі адпаведныя ступені ліку 2:

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...

Магчыма, што Штыфель меў уяўленне аб значэнні далейшага развіцця гэтых ідэй, бо ён заўважае, што аб гэтых выдатных лічбовых суадносінах можна было-б напісаць цэлую кнігу.

Для таго, каб зрабіць лагарыфмы прыгоднымі для практычных вылічэнняў, Штыфелю не хапала яшчэ аднаго важнага дапаможнага сродка, а іменна: дзесятковых дробаў. Такім чынам пасля 1600 г., калі ўведзены былі дзесятковыя дробы, стала магчыма пабудова сапраўдных лагарыфмічных табліц.

Першыя лагарыфмічныя табліцы належаць шатландцу Джону Неперу, які жыў ад 1550 г. да 1617 г. Джон Непер з'яўляецца сапраўдным тварцом лагарыфмаў, ён жа і прыдумаў самую іх назву. Табліцы Непера з'явіліся ў 1614 г. у Эдэнбурзе пад назвай: „апісанне цудоўнага канона лагарыфмаў". Самы-ж спосаб Непера для вылічэння лагарыфмаў быў апублікаван толькі пасля яго смерці пад назвай „Mirifici logarithmorum camonis costrutio".

Незалежна ад Непера швейцарац Бюргі (1552—1632) пабудаваў табліцы, якія ён апублікаваў у 1620 г. у Празе пад назвай „Progiesstabuln".

Ідэі Непера.

Непер пры пабудове сваёй табліцы лагарыфмаў выходзіў з раўнання

$$x = a^y,$$

у якім y з'яўляецца лікам цэлым. Разам з гэтым Непер падабраў лік a так, каб лікі x, якія адпавядаюць цэлым значэнням y, ляжалі па магчымасці шчыльней друг да друга так, каб можна было, такім чынам, знайсці лагарыфм для кожнага ліку. У цяперашні час, як мы бачым, у школе гэта пытанне вырашаецца з дапамогай перахода да дробнага паказальніка y. Але нам ужо вядома, што на гэтым шляху сустракаюцца некаторыя цяжкасці, звязаныя з многазначнасцю лагарыфмічнай функцыі. Непер пазбягае гэтых цяжкасцей тым, што ён падыходзіць да пытання з належнага канца, выбіраючы за аснаванне сваёй сістэмы лагарыфмаў лік, блізкі да адзінкі, а іменна лік

$$a = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0{,}9999999,$$

які вельмі блізак да адзінкі. Лёгка відаць, што пры такім блізкім да адзінкі аснаванні a лікі x, вызначаныя роўнасцю

$$x = a^y,$$

будуць ляжаць вельмі блізка друг да друга пры цэлых значэннях y. На самай справе няхай мы маем два лікі

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

$$x_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{y+1},$$

адпавядаючыя двум сумежным цэлым значэнням y і $y+1$ паказальніка ступені, у гэтым выпадку розйасць між x_1 і x_2 вызначыцца роўнасцю:

$$x_2 - x_1 = \left(1 - \frac{1}{01^7}\right)^{y+1} - \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10^7}\right), =$$

$$= x_1\left(-\frac{1}{10^7}\right),$$

што паказвае на вельмі шчыльнае размеркаванне лікаў x друг да друга пры цэлых значэннях паказальніка ступені y.

Прычына такога выбару аснавання ў сістэме лагарыфмаў Непера заключаецца ў тым, што ён наперад меў на ўвазе ўжыванне сваіх табліц у вылічэнні трыганаметрычных велічынь. На самай справе, у геаметрыі прыходзіцца мець справу перш за ўсё з лагарыфмамі правільных дробаў, г. зн. з лагарыфмамі сінуса і косінуса, якія пры $a>1$ адмоўны, а пры $a<1$ дадатны. На самай справе, лагарыфм адзінкі пры любым аснаванні, непадобным на адзінку, ровен нулю. Значыць, каб атрымаць дадатнае значэнне x менш адзінкі з роўнасці

$$x = a^y$$

у якой $a>1$ трэба палажыць $y<0$, тады як у гэтай-жа роўнасці для $0<x<1$ пры $a<1$ цэлае значэнне y павінна быць дадатным.

Сістэма Бюргі

Бюргі, таксама як і Непер, пры вылічэнні сваіх табліц лагарыфмаў выходзіў з раўнання:

$$x = a^y,$$

у якім меркаваў y лікам цэлым, а для таго, каб лікі x ляжалі як можна бліжэй друг да друга, пры цэлых значэннях y, Бюргі за аснаванне выбраў лік:

$$a = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{1,0001}$$

Такім чынам, Бюргі, таксама як і Непер, мог атрымаць лагарыфмы ўсіх лікаў, пазбаўляючыся пры гэтым ад тых няўдобстваў, якія ўзнікаюць пры дробным паказальніку y, г. зн. ён пазбавіўся ад многазначнасці лагарыфма, якая нас звычайна сцясняе. Аднак, для абодвух даследчыкаў з'яўляецца агульным той галоўны факт, што яны карыстаюцца толькі цэлымі ступенямі ліка y і, дзякуючы гэтаму, пазбаўляюцца ад многазначнасці, якая нас звычайна сцясняе.

Вылічым, для прыклада, па сістэме Бюргі ступені для двух сумежных паказальнікаў y і $(y+1)$, будзем выходзіць пры гэтым з роўнасці:

$$x = a^y.$$

Дапусцім цяпер, што $a=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$,

значыць

$$x_1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y,$$

а

$$x_2=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{y+1},$$

адкуль

$$x_2-x_1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{y+1}-\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y=$$

$$=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y\left(\frac{1}{10^4}\right)=$$

$$=x_1\cdot\left(\frac{1}{10^4}\right).$$

Такім чынам, рознасць 2 сумежных значэнняў x, адпавядаючых двум цэлым сумежным значэнням паказальніка y азначаецца роўнасцю

$$x_2-x_1=\frac{x_1}{10^4}.$$

Абазначаўшы

$$x_2-x_1=\Delta x$$

і дапусціўшы $x_1=x$,

мы атрымліваем:

$$\Delta x=\frac{x}{10^4}\ldots \qquad (1)$$

Калі-ж мы абазначым рознасць

$$(y+1)-y=\Delta y,$$

то роўнасць (1) можна будзе запісаць так:

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{10^4}\ldots \qquad (2).$$

Такім чынам, мы атрымалі раўнанне ў канцовых рознасцях для лагарыфмаў Бюргі, якое сам Бюргі непасрэдна ўжываў пры вылічэнні сваіх табліц. На самай справе, адзначыўшы якое-небудзь значэнне x, адпавядаючае некатораму y, Бюргі знаходзіць наступнае значэнне x_1, адпавядаючае $(y+1)$ праз прыбаўленне да раней знойдзенага значэння x велічыні $\frac{x}{10^4}$, бо

$$x_1=x+\Delta x=x+\frac{x}{10^4}.$$

Напрыклад, няхай у роўнасці

$$x=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y$$

$y=2$, тады

$$1)\ x_1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2=1{,}0002.$$

Значыць, лагарыфм Бюргі для $x_1=1{,}0002$ ровен 2, цяпер па формуле азначаем

$$2)\ x_2=x_1+\frac{x_1}{10^4}=1{,}0002+0{,}0001=1{,}0003.$$

Лёгка відаць, што

$$1)\ x_1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2=1{,}0002$$

$$2)\ x_2=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^3=1{,}0003$$

$$3)\ x_3=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^4=1{,}0004$$

. . . .

$$4)\ x_k=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{k+1}=1{,}000\,k.$$

З даных роўнасцей заключаем, што, мяняючы паказальнікі ступені y скачкамі, мы бачым, што і x змяняецца скачкамі, кожны раз на $\Delta x=\frac{x}{10^4}$.

Падабенства сістэм Бюргі і Непера.

Мы бачылі, што сістэма Бюргі задавальняе рознаснае раўнанне віда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{10^4}{x},$$

а сістэма Непера задавальняе наступнаму рознаснаму раўнанню:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{10^7}{x},$$

дзе ў першым і другім раўнаннях пакладзена $\Delta y=1$. Лёгка паказаць, што абедзве гэтыя сістэмы задавальняюць аднаму і таму-ж рознаснаму раўнанню:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x},$$

у чым і заключаецца іх падабенства.

Для доказу блізкага падабенства сістэмы Бюргі і Непера трэба разглядзець замест ліку y то лікі $\frac{y}{10^4}$, то лікі $-\frac{y}{10^7}$; другімі словамі, пераставіць запятую ў лагарыфмах у першым выпадку ўлева на чатыры десятковых знакі, а ў другім выпадку на сем дзесятковых знакаў, абазначаючы пры гэтым новыя лікі зноў праз y, мы атрымліваем кожны раз лічбовы рад, задавальняючы аднаму і таму-ж рознаснаму раўнанню:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x},$$

у якім y змяняецца скачкамі, у адным выпадку ў 0,0001, а ў другім выпадку ў—0,0000001.

На самай справе, з роўнасці:

$$x_1=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10000}\right]^{\frac{y}{10000}}$$

$$x_2=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{y+1}=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{y}{10^4}+\frac{1}{10^4}}$$

знаходзім, што $\Delta x=\frac{x}{10^4}$

$$\Delta y=\frac{1}{10^4}$$

значыць: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}$.

У сваю чаргу з роўнасцей

$$x_1=\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y=\left[\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{-10^7}\right]^{\frac{-y}{10^7}}$$

$$x_2=\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{y+1}=\left[\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{-10^7}\right]^{-\frac{y}{10^7}-\frac{1}{10^7}}$$

атрымліваем: $\Delta x=-\frac{x}{10^7}$

$$\Delta y=-\frac{1}{10^7},$$

значыць і ў гэтым выпадку сістэма задавальняе рознаснаму раўнанню:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Такім чынам, падабенства сістэм Бюргі і Непера даказана.

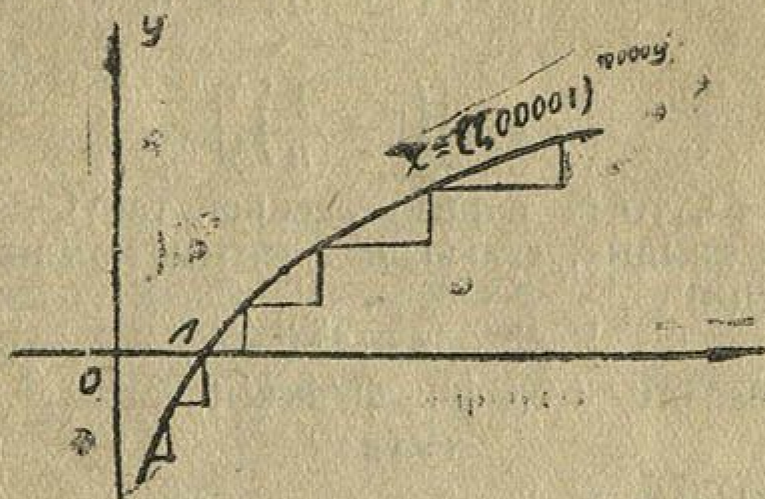
Геаметрычная інтэрпрэтацыя сістэм Бюргі і Непера.

Для разгляду гэтага пытання мы возьмем дзве паказальныя крывыя:

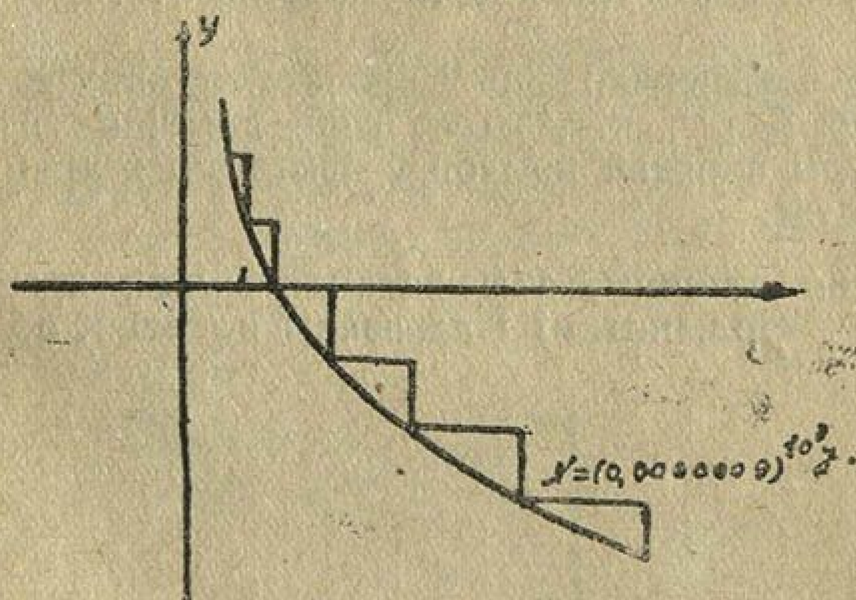
$$x=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10000y}$$

$$x=\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{1000000y}$$

і няхай яны паказаны адпаведна, першая на чарцяжы (1), а другая на чарцяжы (2).



Чарц. 1.



Чарц. 2.

Калі мы цяпер упішам у першую крывую лесніцу са сталай вышынёй ступені $\Delta y=\frac{1}{10^4}$, а ў другую крывую ўпішам лесніцу са сталай вышынёй ступені $\Delta y=-\frac{1}{10^7}$, то вяршыні паказаных лесніц будуць з'яўляцца кропкамі (x, y) адпавядаючымі лічбоваму раду Бюргі ў першым выпадку

і Неперу ў другім. Да гэтага я яшчэ зраблю наступную заўвагу. Калі мы замест роўнасцей.

$$x=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^y$$

і

$$x=\left[\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^y$$

возьмем роўнасці

$$x=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^y$$

і

$$x=\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^y$$

і будзем $n \to \infty$, то як першая лесніца, так і другая, упісаныя ў нашы крывыя, сальюцца з гэтымі крывымі і дадуць графік функцыі

$$x=e^y$$

у першым выпадку і графік функцыі

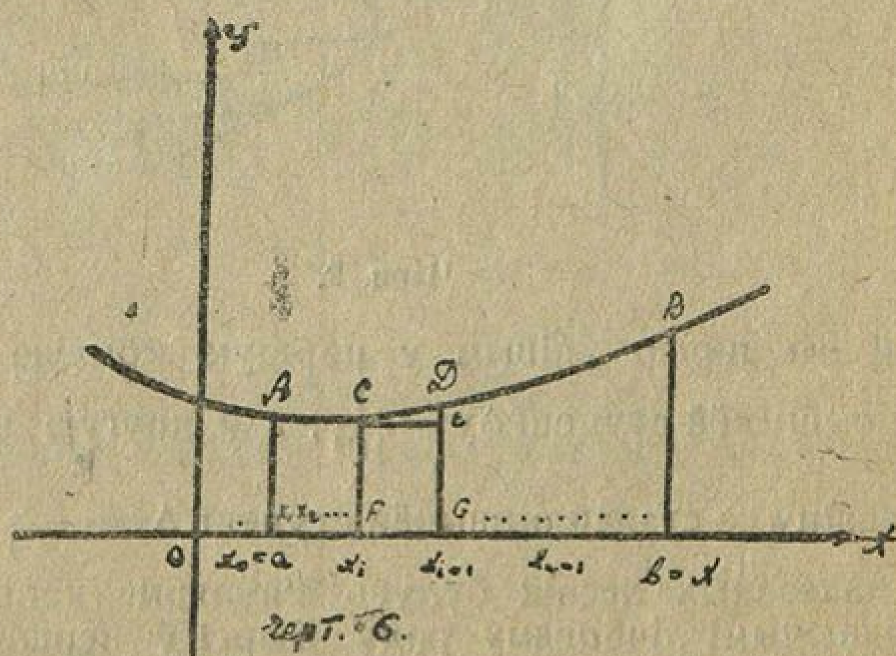
$$x=e^{-y}$$

у другім выпадку.

Другое геаметрычнае тлумачэнне сістэмы Бюргі.

Раней чым пераходзіць да новага тлумачэння сістэмы лагарыфмаў Бюргі, я дазволю сабе спыніцца на разуменні квадратуры плоскай крывой ў дэкартавых прамавугольных каардынатах.

Азначэнне плошчы, адмежаванай дугой крывой, двума ардынатамі і адрэзкам на осі X-ов



Черт. 6.

Няхай $y=f(x)$ крывая (чарц. 1) аднесена да прамавугольнага дэкартазага каардыната, Aa і Bb—дзве ардынаты, адпавядаючыя абсцысам $oa=x_o$ і $ob=x$.

Раздзелім адрэзак [a, b] на n часцей і кропкі дзялення абазначым:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},$$

дзе

$$x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x.$$

Плошчу aABb мы азначым як прэдзел сумы:

$$(x_1-x_o)f(x_o)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(x-x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

да якога яна імкнецца, калі рознасці

$$x_1-x_o;\ x_2-x_1;\ x_3-x_2;\ldots;\ x-x_{n-1}$$

становяцца меней любой наперад заданай велічыні, г. зн. імкнецца да нуля з неабмежаваным узрастанкем ліку n.

Мяркуючы $y_i=f(x_i)$ і $x_n=x$, напішам нашу суму ў болей сціслым відзе:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i).$$

Заўважым таксама, што, памножыўшы $OF=x_i$, $OG=x_{i+1}$ і пабудаваўшы ардынаты $FC=y_i$, $GD=y_{i+1}$, мы можам заключыць, што кожны член $y_i(x_{i+1}-x_i)$ нашай сумы выражае плошчу прамавугольвіка, FCEG, у якім CE паралельна восі X-ов; значыць, прэдзел сумы гэтых прамавугольнікаў, калі лік іх неабмежавана ўзрастае, будзе геаметрычным азначэннем плошчы $aABb=S$, значыць, мы можам напісаць:

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i),$$

або

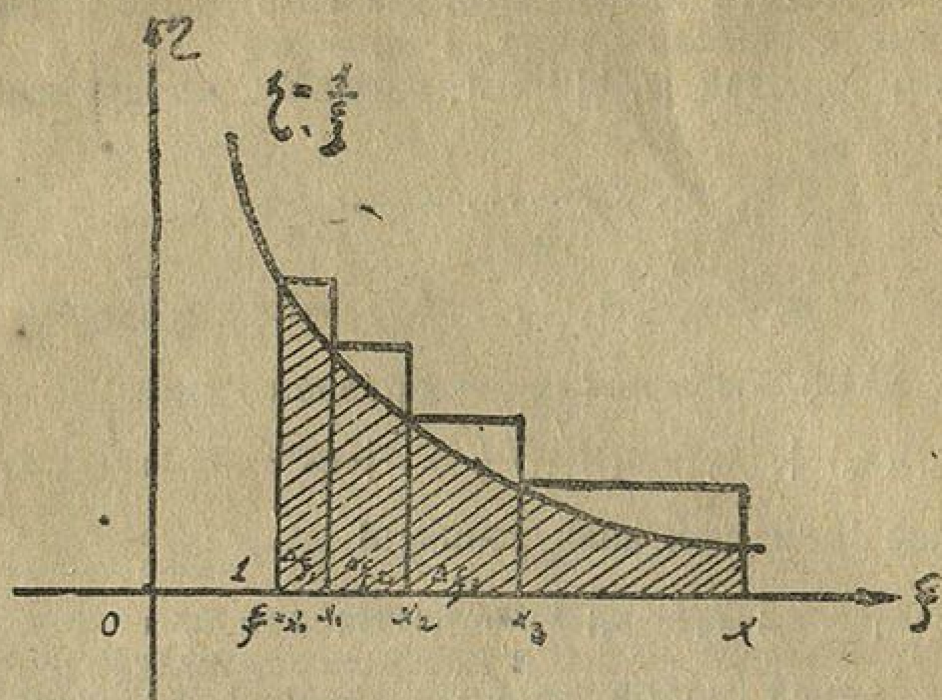
$$S=\int_a^b y dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Пасля зробленай намі заўвагі адносна квадратуры крывой, аднесенай для прамавугольнай сістэмы дэкартавых каардынат, пераходзім да новага геаметрычнага тлумачэння сістэмы Бюргі.

Няхай мы маем роўнабочную гіпербалу:

$$\eta=\frac{1}{\xi},$$

графік, які мае наступны выгляд:



Упішам цяпер у гэту гіпербалу ламаную лінію так, каб вышыня яе звенняў была роўна сталай велічыні:

$$\Delta\eta = \frac{\Delta\xi}{\xi}$$

што, відаць, дае:

$$\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}.$$

Пабудаваць такую ламаную можна наступным спосабам: узяўшы на восі ξ адрэзак $\xi = 1 = x_o$, мы, пачынаючы ад пункта x_o, азначым усе тыя пункты, якія атрымліваюцца, калі паступова дадаваць па

$$\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4},$$

г. зн. адзначым пункты, задавальняючыя роўнасцям:

$$x_o = 1$$

$$x_1 = x_o + \frac{\xi}{10^4}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\xi}{10^4}$$

. . . .

. . . .

на кожным з атрыманых такім чынам адрэзкаў

$$x_{k+1} - x_k = \Delta\xi_k$$

пабудуем як на аснаванні прамавугольнік з вышынёй $\eta_k = \frac{1}{\xi}$, адной з вяршынь якога служыць пункт гіпербалы, якая мае абсцысу ξ.

Усе пабудаваныя намі такім чынам прамавугольнікі маюць адну і тую-ж плошу:

$$S_k = \frac{1}{10^4}.$$

На самай справе, плошча k-го прамавугольніка азначыцца роўнасцю:

$$S_k = \frac{\Delta \xi_k}{\xi_k} = \frac{1}{10^4}$$

але мы маем;

$$\Delta \xi_k = \frac{\xi_k}{10^4},$$

па пабудове, значыць

$$S_k = \frac{1}{10^4} = \frac{\Delta \xi}{\xi},$$

Возьмем суму плошчаў прамавугольнікаў, пабудаваных такім чынам на адрэзку $\overline{x_0 x}$ і абазначым яе праз

$$y = \sum_1^x \frac{\Delta \xi}{\xi},$$

дзе суміраванне трэба разумець у тым сэнсе, што ξ змяняецца ад 1 да x скачкамі такой велічыні, што адпаведнае

$$\Delta \eta = \frac{\Delta \xi}{\xi}$$

заўсёды раўнялася-б $\frac{1}{10^4}$.

Такім чынам, мы замянілі рознаснае раўнанне

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

суміраваннем віда

$$y = \sum_1^x \frac{\Delta \xi}{\xi} \ldots (1)$$

дзе сума прадстаўляе з сябе суму плошчаў пабудаваных, паказаным спосабам, намі прамавугольнікаў. У гэтым выпадку роўнасць (1) паказвае, што лагарыфм Бюргі ровен якраз суме плошчаў усіх пабудаваных намі ўпісаных у гіпербалу прамавугольнікаў, якія ляжаць на адрэзку $\overline{x_0 x}$ Такія-ж самыя развažанні можна правесці і для сістэмы лагарыфмаў Непера.

Сувязь натуральнага лагарыфма з лагарыфмам Бюргі.

Разгледзім плошчу, змешчаную між гіпербалай $\eta = \frac{1}{\xi}$ ардынатамі $\eta = 1$, $\eta = \frac{1}{x}$ і адрэзкам $\overline{x_0 x}$ на восі ξ, як

вядома, шукаемая плошча азначаецца як прэдзел сумы безлічнай множнасці пляцовак прамавугольнікаў, упісаных у гіпербалу, калі кожная плошча паасобку імкнецца да нуля, а лік іх неабмежавана расце:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} S_k,$$

але прэдзел паказанай сумы ёсць не што іншае як пэўны інтэграл:

$$S = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \ln x.$$

Значыць, мы атрымалі азначэнне натуральнага лагарыфма, узяўшы замест сумы плошчаў прамавугольнікаў плошчу, абмежаваную самой гіпербалай між ардынатамі $\xi = 1$, $\xi = x$, г. значыць заштрыхаваную на чарцяжы плошчу. Такі-ж быў і сапраўдны гістарычны шлях. Рашучы крок у гэтым пытанні быў зроблен каля 1650 г., калі аналітычная геаметрыя складала ўжо агульны набытак матэматыкаў і нараджаючаеся вылічэнне бесканечна малых прыводзіла да квадратур вядомых крывых.

Такім чынам, мы атрымалі новае азначэнне натуральнага лагарыфма, а іменна:

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

але калі мы прымаем паказанае азначэнне натуральнага лагарыфма, то павінны канечна, перш за ўсё даказаць уласцівасці гэтай функцыі, якія не супярэчылі ўласцівасцям гэтай-жа функцыі, выведзенай з азначэння лагарыфма як ступені. Асноўная ўласцівасць лагарыфмаў заключаецца ў тым, што з дапамогай іх можна замяняць множанне лікаў складаннем іх лагарыфмаў. З доказу гэтай уласцівасці і пачнем.

Тэарэма:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Доказ:

Раней, чым даказваць сфармуліраваную намі тэарэму, мы дакажам наступную роўнасць:

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi}, \ldots \qquad (1)$$

дзе c любая канстанта, якая адрозніваецца ад нуля.

Па азначэнню лагарыфма мы маем:

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} \ldots \qquad (2)$$

Зробім замену ў правай частцы роўнасці (2): $t = c\xi$, тады

$$dt = c\,d\xi,\ t_1 = c,\ t_2 = cx.$$

Значыць

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{dt}{t}, \dots \qquad (3)$$

але, па ўласцівасці азначанага інтэграла, мы маем

$$\int_c^{cx} \frac{dt}{t} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi} \dots \qquad (4)$$

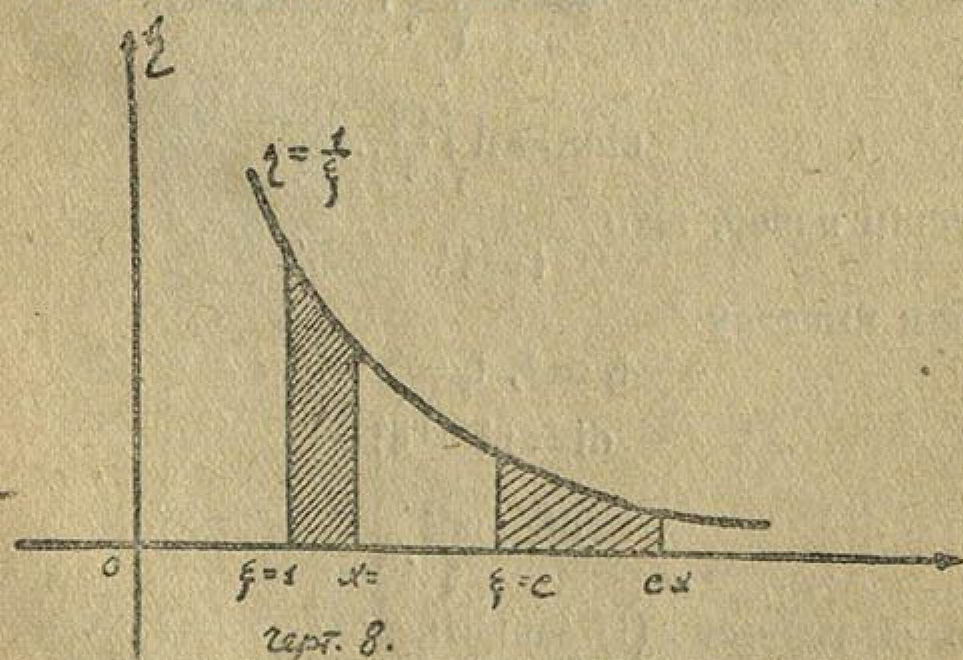
Параўноўваючы цяпер роўнасці (2), (3) і (4), мы атрымліваем, што

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi} \dots \qquad (5)$$

Геаметрычная роўнасць

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi}$$

гаворыць наступнае: плошча, змешчаная між гіпербалай і ардынатамі $\xi = 1$, $\xi = x$, роўна плошчы, змешчанай між гіпербалай і ардынатамі ў c разоў болей аддаленымі ад пачатку каардынат, г. зн. $\xi = c$ і $\xi = cx$. Гэты факт робіцца геаметрычна вельмі наглядным, калі мы ўявім сабе, што велічыня плошчы павінна заставацца сталай, калі перасоўваць яе пад гіпербалай і ў той-жа час расцягваць у такой-жа меры, у якой змяншаецца вышыня.



Черт. 8.

З гэтай тэарэмы непасрэдна выплывае і тэарэма складання, да доказу якой мы і прыступаем.

Па азначэнню лагарыфма мы маем:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi} \ldots \qquad (5)$$

Напішам відавочную тоеснасць:

$$\int_1^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} \ldots \qquad (6)$$

але

$$\int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} \ldots \qquad (7)$$

Значыць, роўнасць (6) запішацца так:

$$\int_1^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi},$$

або, карыстаючыся азначэннем лагарыфма, маем:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \int_1^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \ln x_1 + \ln x_2 \ldots \qquad (8)$$

З параўнання роўнасці (8) з роўнасцю (5) знаходзім:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2,$$

што і даказвае тэарэму.

Тэарэма:

$$\ln x^n = n \ln x,$$

дзе n любы лік.

Доказ:

Па азначэнню натуральнага лагарыфма маем:

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

значыць

$$n \ln x = n \int_1^x \frac{d\xi}{\xi} \ldots \qquad (1)$$

Дапусцім цяпер, што

$$t = \xi^n.$$

У такім выпадку

$$t_1 = 1, \; t_2 = x^n$$

$$dt = n\xi^{n-1}\, d\xi$$

або

$$\frac{dt}{t} = \frac{n d\xi}{\xi}.$$

Значыць, роўнасць (1) запішацца:

$$n \ln x = \int_1^{x^n} \frac{dt}{t},$$

але

$$\int_1^{x^n}\frac{dt}{t}=\int_1^{x^n}\frac{d\xi}{\xi},$$

значыць

$$n\ln x=\int_1^{x^n}\frac{d\xi}{\xi},$$

або

$$n\ln x=\ln x^n,$$

што і даказвае тэарэму.

Следствы:

1) $\ln\frac{x_1}{x_2}=\ln x_1-\ln x_2.$

2) $\ln\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\ln x.$

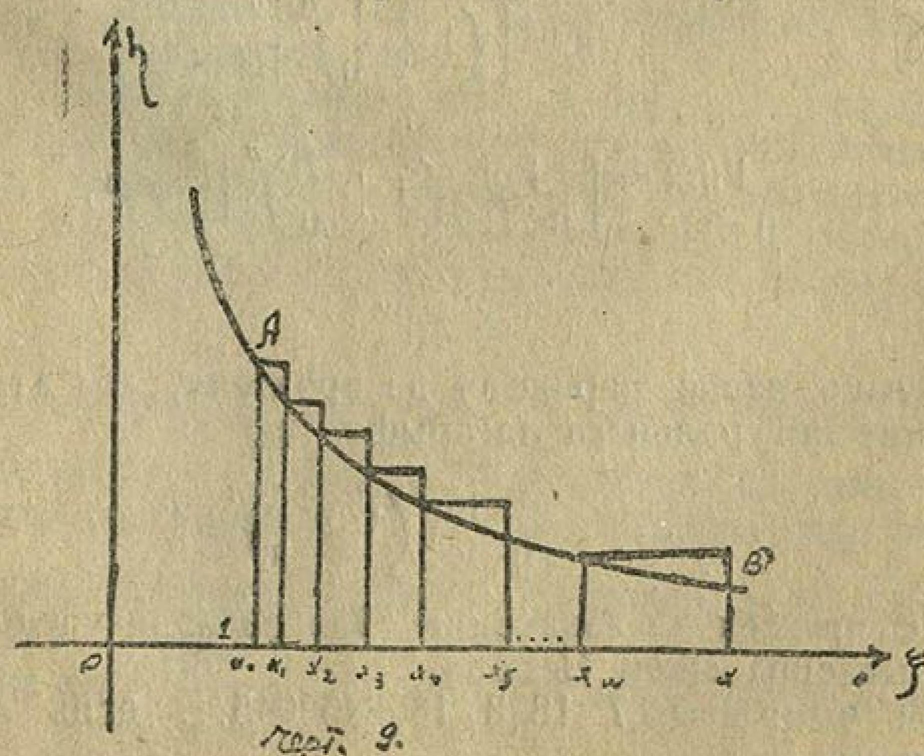
Такім чынам, мы ўпэўніліся ў тым, што функцыя, азначаная роўнасцю:

$$\ln x=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi},$$

задавальняе ўсім тэарэмам лагарыфмаў. Цяпер паўстае пытанне аб аснаванні, якое мы павінны выбраць для азначаных намі натуральных лагарыфмаў. Для рашэння гэтага пытання мы зноў звернемся да геаметрычнай наяўнасці. Няхай мы маем раўнанне роўнабочнай гіпербалы

$$\eta=\frac{1}{\xi},$$

графік якой пададзен на прыкладзеным чарцяжы:



Чарт. 9.

Возьмем на восі ξ пункт $\xi = 1 = x_0$ і адзначым ад гэтага пункту ўправа рад пунктаў $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x$, пасоўваючыся пры гэтым кожны раз не на $\frac{\xi}{10^4}$, як раней, а на $\Delta\xi = \frac{\xi}{n}$.

У гэтым выпадку $\Delta\eta = \frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{1}{n}$, а не $\frac{1}{10^4}$, як раней. Будзем даваць цяпер n неабмежавана ўзрастаючыя значэнні, ад чаго кожны прамавугольнік па плошчы будзе неабмежавана змяншацца, а сума ўсёй безлічы прамавугольнікаў будзе імкнуцца да плошчы x_0ABx, абмежаванай дугой AB, адрэзкам $\overline{x_0x}$ і ардынатамі $\xi = 1$, $\xi = x$. У гэтым выпадку мы можам напісаць, што

$$y = \lim_{\Delta\xi \to 0} \sum_{1}^{x} \frac{\Delta\xi}{\xi}$$

або

$$y = \int_{1}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \ln x.$$

У даным выпадку мы, відаць, замяняем паступовасць Бюргі

$$x = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10000y}$$

паступовасцю

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

у якой n пераважае рад усіх цэлых лікаў: 1, 2, 3, ... Апошнюю роўнасць на падставе азначэння ступені мы можам перапісаць так:

$$x = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{y}$$

або

$$\lim_{n \to \infty} x = \left[\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{y} = e^{y},$$

г. зн.

$$x = e^{y}.$$

Значыць, пасля пераходу да прэдзелу, мы атрымліваем аснаванне натуральнага лагарыфма як

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Гэты прэдзел па азначэнню Эйлера адзначаецца літарай e і называецца лікам Непера.

Пры чым: $e = 2{,}7\ 1828\ 1828459045\ldots$ ёсць лік трансцэндэнтны.

Цікава адзначыць, што аснаванне Бюргі

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10000}=2{,}718146\ldots$$

супадае з лікам e да трэцяга дзесятковага знака.

На самай справе:

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10000}=1+1+\frac{10^4(10^4-1)}{2!(10^4)^2}+\binom{10^4}{3}\frac{1}{(10^4)^3}+$$

$$+\binom{10^4}{4}\frac{1}{(10^4)^4}+\ldots+\frac{1}{(10^4)^{10^4}}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{10^4}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{10^4}\right)\left(1-\frac{2}{10^4}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{10^4}\right)\left(1-\frac{2}{10^4}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{3}{10^4}\right)+\ldots=2+0{,}49995+0{,}16616667+0{,}04164167+$$

$$+0{,}008325835+\ldots=2{,}718146\ldots$$

Лік-жа e можна вывесці з наступных меркаванняў:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n^n},$$

значыць

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots=e,$$

$$e=2+0{,}5+0{,}1666667+0{,}0416667+0{,}0008334+\ldots=$$

$$=2{,}7182818\ldots$$

Заўважым, што ў даным выпадку мы замянілі прэдзел сумы сумай прэдзелаў, што наогул гаворачы незаконна, але ў даным выпадку законна.

Такім чынам, мы бачым, што аснаванне сістэмы лагарыфмаў Бюргі адрозніваецца ад існавання натуральных лагарыфмаў, пачынаючы з чацвертага дзесятковага знака. Значыць, калі мы жадаем узяць аснаванне лагарыфмаў, указаных сістэм да трэцяга дзесятковага знака, то яны супадуць.

Гістарычнае равзіццё лагарыфмаў пасля Бюргі і Непера

Для нас цяпер становіцца зусім яскравым, што Непер і Бюргі пры вылічэнні сваіх табліц карысталіся, канечна, побач з азначэннем паступовых ступеней ліку $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$ і адпаведна ліку $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ на аснаванні розпасных раў-

нанняў таксама інтэрпаляцыйнымі метадамі. Апрача таго, Непер уладаў ужо ідэяй прэдзельнага пераходу да натуральных лагарыфмаў ва ўласным сэнсе, г. зн., выражаючыся сучаснай мовай, пераходу да дыферэнцыяльнага раўнання.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Па сутнасці натуральныя лагарыфмы з'явіліся яшчэ да Непера з прычыны аднаго вельмі важнага поспеху ў картаграфіі: адкрыццё „меркатарскай праекцыі“ Гергардам Меркатарам (каля 1550 г.) можна лічыць першым графічным адкрыццём лагарыфмаў. Дастаткова будзе спаслацца на III раздзел 2-й часткі, II тому гэтых лекцый, дзе высветлена сувязь меркатарскай праекцыі з лагарыфмічнай функцыяй. Калі жадаюць, не ведаючы лагарыфмічнай функцыі, вывесці меркатарскую праекцыю пры дапамозе падыходзячага прэдзельнага пераходу, то наяўна з'яўляецца натуральны лагарыфм з зусім такога-ж пункту погляду, як у Непера з лагарыфмаў Бюргі.

Меркатар адзін з першых стаў карыстацца азначэннем натуральнага лагарыфма праз плошчу гіпербалы. У сваёй кнізе „Logarithmotechnica“, а таксама ў некаторых артыкулах, змешчаных у „Philosophical Transactions“, лонданскай акадэміі за 1667 і 1668 гг. ён паказвае, хаця, уласна гаворачы, з тых-жа меркаванняў, якія я толькі што падаў на сучаснай мове, што

$$f(x)=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi}$$

адрозніваецца ад звычайнага лагарыфма з аснаваннем 10— гэтым аснаваннем ужо тады карысталіся пры вылічэннях— толькі сталым множнікам, так званым модулем сістэмы лагарыфмаў, аб якім мы даведаемся ніжэй. Апрача таго, ён увёў назву „натуральны лагарыфм“ або таксама „гіпербалічны лагарыфм“. Але самай буйнай заслугай Меркатара з'яўляецца тое, што ён знайшоў ступенёвы рад для лагарыфма, які ён атрымлівае па сутнасці, выконваючы ў яго інтэгральным абазначэнні дзялення і інтэгрыруючы затым па частках, г. зн.

$$\ln(x+1)=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi+1}=\int_1^x[1-\xi+\xi^2-\xi^3+\xi^4-\xi^5+-\dots]d\xi=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+-\dots$$

Гэты крок праклаў у матэматыцы новы шлях.

Ньютон скарыстаў гэтыя ідэі Меркатара і ўзбагаціў іх двума новымі вельмі каштоўнымі вынаходкамі: абагуле-

най тэарэмай Бінома і метадам звароту радоў. Ньютон упершыню выводзіць з раду Меркатара для $y=\ln x$ праз яго зварот рад для паказальнай функцыі:

$$x=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}+\ldots$$

Такім чынам лік, натуральны лагарыфм якога ровен адзінцы, атрымліваецца адсюль у такім выглядзе:

$$1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

І з дапамогай функцыянальнага раўнання для лагарыфма не цяжка зусім строга прыйсці да вываду, што для кожнага рацыянальнага y, у сэнсе звычайнага азначэння ступені, x ровен аднаму з значэнняў e^y, а іменна дадатнаму, як мы яшчэ ўбачым ніжэй. Такім чынам, функцыя $y=\ln x$ сапраўды прадстаўляе тое, што, згодна звычайнага азначэння, трэба-б было назваць лагарыфмам x пры аснаванні e, прычым e тут азначана праз рад, а не як

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Болей удобны спосаб атрымання паказальнага раду меў магчымасць даць Брук Тэйлор, устанавіўшы ў сваім „метадзе прырашчэння“ агульны прынцып раскладання ў рад, названы яго імем:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots+$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Яму трэба было толькі з суадносіны, якая змяшчалася ў азначэнні лагарыфма з дапамогаю інтэграла:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

вывесці для адваротнай функцыі роўнасць:

$$\frac{de^y}{dy}=e^y.$$

Пасля гэтага ён меў магчымасць адразу напісаць рад для паказальнай функцыі як прыватны выпадак яго агульнага раду. За гэтай прадукцыйнай эпохай наступіла эпоха крытыкі, якую можна назваць амаль эпохай маральнага прыгнечання; на працягу гэтага перыяду матэматыкі імкнуліся, галоўным чынам, да таго, каб надзейна абгрунтаваць уноў здабытыя вынікі і аддзяліць тое, што магло аказацца няправільным.

(Працяг будзе)

ЗМЕСТ

Рэдкалегія: *А. Велічкін, І. Марголін, Н. Міхалевіч.*

Упаўн. Галоўлітбела № 1491. Зак. 2541—300 экз. Гомель, „Палесдрук“.



БЯСПЛАТНА